

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

**UMA AVALIAÇÃO DE MODELOS DE *VALUE-AT-RISK*:
COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS TRADICIONAIS E MODELOS
DE VARIÂNCIA CONDICIONAL**

MARCOS ANTONIO MOLLICA

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira

São Paulo

1999

Reitor da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Jacques Marcovitch

Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Prof. Dr. Eliseu Martins

Chefe do Departamento de Economia

Prof. Dr. Denisard Cnéio de Oliveira Alves

Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Economia

Prof. Dr. Paulo Picchetti

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA**

**UMA AVALIAÇÃO DE MODELOS DE *VALUE-AT-RISK*:
COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS TRADICIONAIS E MODELOS
DE VARIÂNCIA CONDICIONAL**

MARCOS ANTONIO MOLLICA

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira

Dissertação apresentada ao Departamento de Economia,
Administração e Contabilidade da Universidade de São
Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Economia

São Paulo

1999

RESUMO

Atualmente os produtos transacionados no mercado financeiro vem apresentando uma constante sofisticação. Particularmente, o crescimento da importância dos derivativos aumentou, consideravelmente, a complexidade das carteiras ampliando o número de fontes de risco as quais elas estão sujeitas. Neste contexto, torna-se fundamental o desenvolvimento de técnicas que permitam avaliar o potencial de perda de uma carteira de investimentos. Certamente, a técnica mais difundida é o *value-at-risk* que resume num único número a perda provável de uma posição. Na sua versão mais simples, o modelo delta-normal, o ponto crucial é a estimação da matriz de covariâncias. O objetivo deste trabalho é realizar uma comparação das técnicas mais utilizadas para esta estimação: o suavizamento exponencial, os modelos GARCH e o modelo de volatilidade estocástica, no caso específico de um conjunto de ativos brasileiros. Abandonando a hipótese de normalidade, a alternativa mais simples é o modelo de simulação histórica, que também é comparado com os modelos anteriores. Um último ponto a destacar é a forma de comparar estes modelos. Por se tratar de uma estimação de intervalos, não é possível aplicar as técnicas econométricas usuais para avaliação de previsões. O trabalho opta pela utilização do método sugerido em Lopez (1998) por ser aplicável em casos em que as séries históricas disponíveis são, relativamente, curtas.

ABSTRACT

Nowadays, the products traded in the financial market is presenting an increasing sophistication. Particularly, the growing importance of the derivatives increased, considerably, the complexity of the portfolios expanding the number of risk sources they are subject to. In this context, the development of techniques to evaluate the potential loss of a portfolio becomes essential. Surely, the so called value-at-risk, which resumes the likely potential loss of a position in a single number, is the most known technique. In its most simple version, the delta-normal model, the crucial point is the estimation of the covariance matrix. The objective of this dissertation is to compare de most used techniques to this estimation: the exponential smoothing, the GARCH and the stochastic volatility models, in the specific case of a portfolio of Brazilian assets. When the hypothesis of normality is abandoned, the most simple alternative is the historical simulation model, which is also compared with the former models. A last point to call attention is the way to compare these models. As it is an interval estimation, it is not possible to apply the usual econometric techniques to evaluate the forecasts. The present dissertation opt to apply the method suggested by Lopez (1998) because it is the most suitable to cases in which the historical series available are relatively short.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Evolução do Controle de Risco.....	1
2	A TÉCNICA DO <i>VALUE AT RISK</i>	9
2.1	O VAR Delta-Normal.....	11
2.1.1	Estruturas de Mapeamento.....	14
2.1.2	Avaliação do Modelo Delta-Normal.....	18
2.2	Simulação Histórica.....	19
3	MÉTODOS PRA ESTIMAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS.....	22
3.1	Fatos Estilizados.....	22
3.2	Método Amostral.....	24
3.3	Suavização Amostral.....	25
3.4	Modelos da Família GARCH.....	28
3.5	Volatilidade Estocástica.....	33
4	DESCRIÇÃO DOS DADOS E AVALIAÇÃO DOS MODELOS.....	39
4.1	Descrição dos Ativos.....	39
4.1.1	Contratos Futuros.....	39
4.2	Análise Descritiva dos Dados.....	49
4.2.1	Vértices Fixos da Curva de Juros.....	49
4.2.2	Séries de Ajustes Diários dos DI's Futuros.....	52
4.2.3	Séries dos ativos Ligados ao Mercado de Ações.....	56
4.3	Métodos para Avaliação dos Modelos.....	60
4.3.1	Kupiec.....	60
4.3.2	Christoffersen.....	63
4.3.3	Chrkovic e Drachman.....	66
4.3.4	Lopez.....	67

5	RESULTADOS.....	69
5.1	Carteira 1.....	70
5.1.1	Frequência de Erro.....	70
5.1.2	Teste de Lopez.....	73
5.2	Carteira 2.....	74
5.2.1	Frequência de Erro.....	74
5.2.2	Teste de Lopez.....	77
6	CONCLUSÃO.....	79
7	BIBLIOGRAFIA.....	81

Agradecimentos

Ao amigo e Prof. Pedro Luiz Valls Pereira pelos ensinamentos, discussões e incentivo não só nesta dissertação, mas também durante anos de minha vida acadêmica desde os cursos de estatística básica na graduação.

Ao amigo e Prof. José Carlos de Souza Santos pelas inúmeras discussões e ensinamentos transmitidos no convívio no dia-a-dia do mercado financeiro na Linear DTVM, além de vários comentários extremamente pertinentes no exame de qualificação.

Aos professores Marcos Eugênio Silva e Armênio Souza Rangel pelas críticas e sugestões no exame de qualificação.

A todos na Linear DTVM por toda a aprendizagem prática que me proporcionaram.

À minha namorada Andrea por toda paciência, compreensão e incentivo durante todo o período de elaboração deste trabalho.

Aos meus pais por todo apoio em todos meus anos de estudo.

Aos colegas de turma pelo ambiente de convívio extremamente agradável ao longo do curso de mestrado.

À Luiz Alvarez Resende de Souza pela gentileza de emprestar um programa essencial a conclusão do trabalho.

À CAPES pela bolsa de mestrado.

À FEA e ao IPE pelos recursos de infra-estrutura oferecidos aos alunos de pós-graduação.

1- INTRODUÇÃO

1.1- Evolução do Controle de Risco

A capacidade do homem de prever o futuro permanece ainda extremamente limitada. Apesar do imenso esforço de especialistas das mais diferentes áreas durante anos de desenvolvimento do conhecimento científico, as previsões sobre os mais variados eventos como as condições climáticas para o próximo dia, o comportamento do produto interno de uma determinada economia ou a evolução do preço da ação de uma empresa qualquer continuam sujeitas a um grau de erro razoavelmente elevado.

Existem duas posturas diante deste desconhecimento sobre o futuro. A primeira, delas sugerida por autores como Frank Knight e John Maynard Keynes, admite que em eventos econômicos prevalece uma situação de incerteza em relação ao futuro. A incerteza é uma situação onde não se conhece nem o conjunto de eventos possíveis nem a probabilidade de ocorrência de cada um dos eventos. Neste ambiente a ação do agente econômico tem que ser guiada por um comportamento em relação ao futuro que não se apoia apenas na análise racional. Além dela, deve existir um certo impulso instintivo que leva o agente a tomar esta ou aquela decisão. Como disse Keynes (1936): *"Most, probably, of our decisions to do something positive, the full consequences of which will be drawn out over many days to come, can only be taken as a result of animal spirits – of a spontaneous urge to action rather than inaction, and not as the outcome of a weighted average of quantitative benefits multiplied by quantitative probabilities."*

Uma outra abordagem é admitir que são conhecidos o conjunto de estados da natureza futuros bem como as respectivas probabilidades de ocorrência de cada um destes estados. Neste caso, diz-se que a escolha do agente econômico envolve risco. Este é o conceito de risco utilizado na teoria neoclássica de escolha. Explicita-se um conjunto de axiomas de racionalidade com base nos quais é possível derivar as características das preferências dos agentes. Em particular, a garantia da existência de uma função de utilidade com certas propriedades de regularidade garante que a escolha do indivíduo possa ser derivada

a partir de um processo otimizador. A escolha do agente econômico pode ser guiada então, exclusivamente, por um comportamento racional.

Quem já teve a oportunidade de acompanhar o dia a dia dos mercados financeiros de perto, muito provavelmente irá admitir que, em certos momentos, o *animal spirits* keynesiano é o único comportamento que guia a tomada de decisões dos agentes. Particularmente, em momentos de crise o conceito de incerteza salta aos olhos do observador. Contudo, a sistematização e a conseqüente capacidade de prever o comportamento dos agentes a partir de alguns pressupostos razoáveis de racionalidade, torna o conceito de risco atrativo. Quando se fala em risco neste trabalho é o conceito de risco da teoria neoclássica que se utiliza.

Este trabalho preocupa-se em comparar métodos de quantificação de um certo tipo de risco de uma carteira de ativos. Adota-se sempre uma abordagem empírica buscando evitar simplificações que afastem a técnica utilizada da realidade do mercado. Por exemplo, existe uma preocupação em trabalhar sempre no mundo multivariado, embora modelos mais sofisticados possam ser aplicados com maior facilidade no mundo univariado. Isto porque, raramente, uma instituição financeira tem uma carteira com um único ativo. O mais comum são carteiras com grande número de ativos das mais variadas características.

O risco está presente em várias formas no mercado financeiro, eliminá-lo por completo é tarefa impossível e muito menos desejável, pois existem riscos que se deseja incorrer. A exposição a certos riscos trás consigo a possibilidade de materialização de cenários favoráveis onde seja possível obter um lucro compatível. O importante é ter a capacidade de conhecer e gerenciar o risco das decisões tomadas. Com isso, torna-se possível dimensionar a exposição a diversas fontes de risco bem como escolher que tipo de risco aceitar e que tipo eliminar.

Numa empresa existem riscos de diferentes natureza. Pode-se citar como principais os seguintes: risco do negócio, risco de mercado, risco de crédito, risco de liquidez, risco operacional e risco legal.

- **risco de negócio** se refere aos riscos específicos à indústria ou ao mercado em que a empresa opera. Por exemplo, uma administradora de recursos especializada em vender fundos de renda variável está sujeita ao risco dos investidores reduzirem seu interesse por este tipo de produto passando a concentrar seus investimentos em fundos de renda fixa.
- **risco de mercado** é o risco de perdas decorrentes de movimentos adversos nos preços dos ativos. Existem 4 fatores básicos para este tipo de risco: ações, juros, moedas e commodities. De maneira geral, o risco dos diversos instrumentos existentes atualmente no mercado financeiro é composição destes fatores primários.
- **risco de crédito** é o risco de perdas decorrentes da contraparte ser incapaz de honrar os pagamentos prometidos. Por exemplo, um banco pode emprestar um montante a uma empresa que decreta falência antes de quitar a dívida.
- **risco de liquidez** se refere ao custo de liquidar uma posição relativamente grande em relação ao tamanho total do mercado. Neste caso, existe o risco de ter que pagar um prêmio para encontrar outro agente disposto realizar a operação inversa.
- **risco operacional** é o risco de erros dos sistemas internos da empresa ou das pessoas que os operam. Por exemplo, o não funcionamento de um software ou o erro de digitação de uma determinada operação.
- **risco legal** se refere ao risco de certos itens de um contrato não serem cumpridos pela contraparte.

Este trabalho está focado especificamente na apresentação e comparação das diversas técnicas existentes na literatura para a mensuração do risco de mercado.

Tanto a prática como a teoria do gerenciamento do risco de mercado vem tendo um enorme desenvolvimento nos últimos 20 anos. Existem uma série de fatores que impulsionaram o crescente aprimoramento e utilização das técnicas de controle de risco nos últimos anos.

Em primeiro lugar, pode-se citar o intenso processo de internacionalização pelo qual vem passando o mercado financeiro nas últimas duas décadas que tende a produzir uma maior instabilidade nos mercados e, conseqüentemente, amplia as possibilidades de perdas significativas. Como exemplos, tem-se os casos de ataques especulativos em regimes cambiais pouco flexíveis e mudanças nas políticas monetárias dos países como forma de defesa.

A crise dos mercados asiáticos ocorrida em outubro de 1997 expôs de forma dramática a intensa relação entre os mercados de todo mundo. O ataque aos regimes cambiais daqueles países e a subsequente ruptura dos mesmos teve forte repercussão em diversos outros mercados tanto de países desenvolvidos, o índice Dow Jones da Bolsa de Nova York experimentou uma das maiores quedas de sua história, quanto dos ditos países emergentes. Aqui no Brasil a taxa de juro primária dobrou para poder conter um ataque especulativo ao Real. Neste contexto, torna-se evidente a necessidade das empresas possuírem uma noção exata das relações entre os diversos mercados em que atuam bem como contarem com diagnóstico preciso das fontes de riscos as quais sua carteira de ativos está exposta.

Outro fato que possibilitou a expansão das técnicas de gerenciamento de risco foi o notável avanço ocorrido na tecnologia de informação. Como efeito, tem-se um aumento da capacidade de processamento dos computadores com redução significativa do tempo de cálculo necessário para algumas técnicas utilizadas na análise de risco. Por exemplo, técnicas que empregam um grande volume de simulação. Para se ter uma noção mais precisa da dimensão do desenvolvimento da tecnologia de informação pode-se citar alguns exemplos de Guldemann (1996): em 1965 o custo de armazenamento de 1 megabyte de dados era de US\$ 100.000, hoje é US\$ 20 e em 2005 será de aproximadamente US\$ 1. Em 1975 o custo para enviar 1 megabyte de Nova York a Tokyo era US\$ 10.000, hoje é US\$ 5 e em 2005 será de aproximadamente US\$ 0.01. E o custo de um processador para lidar com 1 milhão de informações por segundo era US\$ 1 milhão em 1965, passou para US\$ 1,5 hoje e em 2005 será possivelmente de alguns centavos. Estes avanços fazem com que o emprego de novas técnicas não sofra nenhuma

restrição do ponto de vista tecnológico permitindo que os resultados possam ser obtidos instantaneamente.

Juntamente com estes fatos, vem ocorrendo um vigoroso crescimento do volume de transações financeiras realizadas. Por exemplo, o número de ações transacionadas por dia na Bolsa de Nova York passou de 3,5 milhões em 1970 para cerca de 40 milhões em 1990, o volume transacionado de moedas passou de alguns bilhões de dólares em 1965 para mais de 1 trilhão por dia em 1996.

Além do crescimento do volume transacionado, observou-se também uma ampliação do número e da complexidade dos instrumentos utilizados nas operações. Neste ponto o fato mais importante ocorrido foi o surgimento dos derivativos, ativos cujos valor depende do valor de outros ativos. As opções, os contratos futuros, os *swaps*, são exemplos mais comuns de derivativos.

De um lado, tais instrumentos tornaram disponíveis aos investidores um número muito maior de formas de alocações de recursos tanto para proteção contra certos cenários como para alavancagem de posições. De outro lado, no entanto, estes instrumentos aumentam a complexidade das carteiras de ativos expandindo as fontes de risco as quais estão expostas e o volume de perdas em situações adversas. Por exemplo, um *swap* de Dólar contra Iene está exposto aos riscos de ambas as taxas de câmbios e do diferencial de juros entre Estados Unidos e Japão. Além disso, a posição pode ser feita de forma alavancada, o que implica dizer que em situações extremas é possível perder um volume de recursos acima da capacidade financeira do realizador da operação.

Com isso, torna-se essencial o emprego de técnicas que detectem e quantifiquem todas as fontes de risco de uma carteira tornando possível ao administrador gerenciá-lo escolhendo quais riscos está disposto a correr e quais deseja evitar. Note que a não é eliminar todos riscos e sim gerenciá-los de forma consciente e racional.

A intensificação do uso dos derivativos pelas instituições financeiras aumentou, também, a preocupação dos órgãos reguladores com o risco potencial que elas estariam correndo. Isto porque a complexidade destes instrumentos reduz a transparência das posições

dificultando qualquer tipo de supervisão. Além disso, ao aumentar o poder de alavancagem das posições, estes instrumentos podem ocasionar a falência de instituições aparentemente saudáveis quando ocorrem movimentos adversos nos mercados. Os derivativos, também, expõem as carteiras a riscos antes inexistentes. Por exemplo, o preço de uma opção depende da volatilidade do ativo objeto.

Estas preocupações iniciaram um intenso debate sobre como controlar o risco das instituições financeiras. No início desta década, diversos relatórios, sugerindo o que seria uma prática saudável de controle de risco, foram divulgados por órgãos reguladores. Entre estes órgãos estão o Grupo dos 30, *Bank for International Settlements* (BIS), *Internacional Organization of Securities Commissions* (IOSCO), *Derivatives Policy Group*, *Internacional Swaps and Derivatives Association* (ISDA).

Estes relatórios indicavam uma série de recomendações para as instituições controlarem o risco dos derivativos. Entre as mais importantes recomendações pode-se citar a necessidade dos administradores *seniores* entenderem o risco do seu negócio, a importância destes membros terem consciência do risco tomado pelos membros *juniores*, a separação do *front office* (*trading*) do *back office* (administrativo) como forma de evitar fraudes e omissão de operações, criação de um controle de risco independente (*middle office*) que se reporta diretamente aos *seniores*, importância de auditorias e sistemas de controle, importância de sistemas de informação, uso de modelos de risco para gerenciar o risco das instituições.

No começo do anos 90, vários desastres financeiros tornaram ainda mais evidente a necessidade do controle de risco. Citando os casos listados por Dowd (1998):

Metallgesellschaft: uma subsidiária americana da MG montou um grande posição em futuros de petróleo numa tentativa de hedgear alguns contratos *forward* de gasolina de longa maturação que havia vendido. A queda nos preços do petróleo em 1993 levou a pesadas perdas e a matriz alemã teve que intervir para liquidar a posição. Perda final de US\$1.3bilhões.

Orange County: o tesoureiro do County, Bob Citron, investiu os recursos do *County's Investment Pool* em instrumentos de derivativos altamente alavancados que significavam uma aposta na queda da taxa de juros. O aumento nas taxas de juros em 1994 provocaram perdas de US\$ 1.7 bilhões.

Barings Bank: Nick Leeson, um operador da filial de Singapura do Barings, montou uma grande posição não autorizada em futuros e opções do índice Nikkei da Bolsa de Tóquio. O montante envolvido na operação excedia o capital do banco e com o movimento adverso da bolsa japonesa provocado por um terremoto, o banco foi levado a falência com perdas ao redor de US\$ 1.3 bilhões.

Daiwa Bank: um único operador, Toshihide Iguchi, escondeu num período de 11 anos perdas em Títulos do Tesouro que acumulavam US\$ 1.1 bilhões. As perdas vieram a tona quando Iguchi confessou ao seu superior em 1995.

Sumitomo Corporation: em junho de 1996, Sumitomo anunciou uma perda de US\$ 1.8 bilhões. Estas perdas foram acumuladas durante um período de 10 anos em operações não autorizadas realizadas pelo operador chefe, Yasuo Hamanaka.

Estes casos apresentam alguns pontos em comum. Em todos eles um único indivíduo, por ausência de um sistema de controle rigoroso e de um departamento de risco independente, foi capaz de assumir posições não imaginadas pelos seus superiores e esconder perdas enormes. Este relaxamento na supervisão do risco que os operadores estão incorrendo cria uma situação conhecida em economia como *Moral Hazard*. Quando sofrem a primeira perda, a reputação e o emprego do operador já estão seriamente ameaçados. Assim, como não tem mais nada a perder, ele tem todo incentivo para aumentar a aposta e tentar recuperar a perda, atitude essa que pode levar a perdas bem maiores e a eventual falência da instituição. Se a instituição contasse com um controle de risco independente, os administradores seniores estariam conscientes de todo risco das posições de seus subordinados e, numa situação como esta, poderiam intervir evitando estragos maiores.

A evolução do debate sobre a necessidade de gerenciamento de riscos levou as instituições financeiras a tentar desenvolver sistemas internos que pudessem mensurar sua exposição total a perdas. O sistema que emergiu como *benchmark* do mercado foi o *Riskmetrics* desenvolvido pelo banco americano JP Morgan. Segundo Dowd (1998), esta metodologia se originou quando um diretor do banco, Dennis Weatherstone, pediu aos seus subordinados que elaborassem um relatório de uma página que resumisse a perda potencial da instituição nas próximas 24 horas e lhe entregassem diariamente pontualmente as 4:15, após o fechamento do mercado. Este relatório ficou conhecido como “relatório 4:15”.

Para atender a solicitação do chefe, foi necessário uma mini revolução, procedimentos de informações sobre as carteiras foram estabelecidos, técnicas para resumir posições foram criadas, banco de dados construídos, procedimentos estatísticos selecionados. O resultado final foi a medida conhecida como *Value-at-Risk* (VAR) que leva em conta não só o risco individual de cada ativo, expresso estatisticamente no desvio padrão dos retornos, mas também as relações entre os diversos ativos dadas pelas correlações. Os detalhes desta metodologia serão apresentados na próxima seção. O fator que consolidou o *Riskmetrics* como *benchmark* do mercado foi, sem dúvida, a disponibilização de um relatório técnico com todos detalhes da metodologia na página do JP Morgan na Internet.

Nos últimos anos, a teoria de controle de risco evoluiu rapidamente tornando disponível uma grande variedade de técnicas com características bastante distintas. No entanto, nenhuma delas é capaz de dominar totalmente as outras. Desta forma, dada a importância que o controle de risco tem hoje nas diversas instituições, torna-se essencial entender as vantagens e desvantagens de cada técnica para que seja possível escolher a mais apropriada para o problema em questão. Neste trabalho expõe-se em detalhes as técnicas mais difundidas e tenta-se selecionar a mais adequada ao caso específico de uma carteira de ativos brasileiros.

2- A TÉCNICA do VALUE –AT-RISK

A noção de risco de um portfólio está associada ao fato de que seu retorno em um dado período de tempo não ser conhecido de antemão. Ao contrário, existe um conjunto de retornos possíveis. As probabilidades de ocorrência de cada um dos elementos deste conjunto irão determinar, em última instância, o potencial de perda da carteira. Sob este aspecto, o ponto de partida para gerar uma medida de risco é o conhecimento da distribuição de probabilidades dos retornos, ou seja, da função que liga retornos possíveis a sua respectiva possibilidade de ocorrência expresso numa medida de probabilidade. Esta função permite que se faça uma afirmação probabilista a respeito das variações adversas de um portfólio.

Assim, por exemplo, se uma carteira, cujo valor de mercado é R\$ 100.000, apresentasse uma probabilidade de ocorrência de retornos abaixo de -2% igual a 5%. Então poderia-se fazer a seguinte afirmação acerca do seu risco: *a carteira tem 5% de probabilidade de gerar uma perda financeira maior ou igual a R\$ 2.000*. Os modelos de análise de risco são, a grosso modo, um conjunto de técnicas que tem como o objetivo gerar este tipo de informação.

A sentença probabilista enunciada no parágrafo anterior é a essência do conceito desenvolvido pelo banco JP Morgan, o *Value-at-Risk* (VAR). O valor de R\$ 2.000 é o VAR daquela carteira de ativos a 5% de probabilidade ou, em linguagem estatística, R\$ 2.000 é a perda máxima ao nível de significância de 5%. Assim, pode-se dizer que o VAR é uma medida que expressa, de forma probabilista, as variações adversas esperadas de uma carteira de ativos.

Formalmente, o *Value-at-Risk* de um portfólio é definido como a máxima perda em unidades monetárias num dado espaço de tempo a um certo nível de significância. Analiticamente, tomando a função densidade acumulada do retornos diários de uma carteira de ativos, ou seja, a função que informa a probabilidade de ocorrência de retornos abaixo de um determinado ponto:

$F(x) = \text{Probabilidade[retornos} < x],$

Supondo que exista tal função e que ela seja estável no tempo, o VAR a $\alpha\%$ de significância do portfólio é igual a:

$$\text{VAR} = F^{-1}(\alpha).P \quad (1)$$

onde, P é o valor de mercado do portfólio.

O termo $F^{-1}(\alpha)$ é o retorno x tal que a probabilidade de ocorrência de retornos menores que x seja igual a $\alpha\%$. Este retorno multiplicado pelo valor de mercado da carteira informa a variação adversa, em termos monetários, tal que a ocorrência de situações piores, perdas maiores, ocorre com probabilidade de $\alpha\%$.

Note que, no cálculo do VAR, é preciso definir arbitrariamente um nível de significância e um período de tempo. Este último costuma ser considerado como o tempo necessário para liquidar toda a posição. Na definição apresentada, supõe-se, implicitamente, que este período é igual a um dia de negociação, neste caso o VAR é conhecido também como *Dayly Earnings at Risk* (DEAR).

Com relação à escolha do nível de significância, pode-se dizer que a escolha, em última instância, é arbitrária. Mas, dependendo do propósito em questão - avaliação da precisão do sistema risco implantado, determinação do volume de capital da instituição ou comparação de sistemas de risco distintos - tem-se alguns guias para a escolha. Se o propósito for a avaliação do sistema recomenda-se que o nível de significância seja alto porque, caso contrário, retornos que excedem o VAR seriam eventos raros e, com isso, seria necessário uma base de dados muito grande para se obter informações sobre o desempenho do modelo, Kupiec (1995). No caso da determinação de capital, a escolha do nível de significância depende do grau de aversão ao risco do administrador, quanto mais averso ao risco menor deve ser o nível de significância para que o capital alocado seja maior. Por último, se o propósito é comparar diferentes sistemas de risco então, sob a hipótese de normalidade, o nível de significância escolhido é irrelevante pois, neste caso, o VAR com dado nível de significância pode ser diretamente transformado num outro

nível de significância qualquer com a simples alteração do parâmetro V_c . No entanto, sem a hipótese de normalidade isto não é mais possível e VAR's de diferentes níveis de significância tornam-se incomparáveis.

Pela definição acima o cálculo do VAR envolve apenas um problema probabilístico, uma vez que estamos supondo conhecida a distribuição dos retornos da carteira. Na prática, a mensuração do VAR envolve também um problema de inferência, pois a única informação disponível é a realização do processo estocástico gerador dos retornos. As diversas técnicas se diferenciam, basicamente, no modo como tratam o problema do desconhecimento do verdadeiro processo estocástico gerador dos dados. Em seguida, apresentamos as principais técnicas de cálculo do VAR.

2.1- O VAR delta-normal

Esta é uma das abordagens mais simples, supõe que os retornos dos ativos sejam normalmente distribuídos e que para posições em derivativos seja possível encontrar uma posição equivalente no ativo subjacente através de uma linearização da função que liga seu preço ao preço do ativo objeto.

Com a hipótese de normalidade, podemos caracterizar completamente a distribuição dos retornos dos ativos com apenas dois parâmetros, sua média e seu desvio padrão. Neste caso, o VAR de um portfólio de um único ativo cujos retornos (y) apresentam média 0 e variância σ^2 ,

$y \sim N(0, \sigma)$, é dado por:

$$\text{VAR} = V_c \cdot \sigma \cdot P \quad (2)$$

onde, P é o valor de mercado do portfólio e V_c o valor crítico da normal a um dado nível de significância.

A hipótese de que os retornos tem média zero é, freqüentemente, utilizada na literatura de finanças. Esta é uma hipótese simplificadora que não trás problemas quando o objetivo é

o cálculo do risco de um ativo. Em primeiro lugar, porque a maioria das séries financeiras apresentam médias próximas de zero, fato que ocorre nas séries estudadas neste trabalho, como se verificará mais a frente. Em segundo lugar, porque nos modelos econométricos pode-se fazer com que as estimativas da variância não sejam influenciadas pelas estimativas da média do processo. Por último, nos modelos de precificação de opções a média dos retornos não entra na equação do preço da opção.

Outra facilidade obtida com a hipótese de normalidade é a fácil extensão do cálculo do VAR para uma carteira com diversos ativos. Da teoria de probabilidade sabe-se que se a distribuição marginal de um conjunto de variáveis aleatórias:

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

é normal com médias:

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

e matriz de variâncias e covariâncias:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

então a variável aleatória:

$$Y = w_1 \cdot y_1 + w_2 \cdot y_2 + \dots + w_n \cdot y_n$$

também é normalmente distribuída. com média:

$$M = w_1 \cdot \mu_1 + w_2 \cdot \mu_2 + \dots + w_n \cdot \mu_n = w' \mu,$$

e variância:

$$V = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij} = w' \Sigma w,$$

onde Σ é a matriz de covariância da variável aleatória Y .

A expressão para o retorno de um portfólio de n ativos com participação relativas $w_1, w_2, \dots, w_n$ é idêntica a expressão Y acima. Logo, assumindo média zero, a distribuição dos retornos deste portfólio é:

$$Y \sim N(0, \omega' \Sigma \omega)$$

Com isso o VAR deste portfólio é dados por:

$$\text{VAR} = V_c (\omega' \Sigma \omega)^{1/2} P \quad (3)$$

onde, P é o valor de mercado da carteira.

Outro atrativo da hipótese de normalidade é o conteúdo informacional do VAR que, na verdade, se divide em duas vantagens. A primeira vem do fato de que VAR's calculados a diferentes níveis de significância podem ser trazidos para um nível de significância comum. Por exemplo, sejam VAR_1 e VAR_2 *Values at Risk* de um mesmo portfólio aos níveis de significância α_1 e α_2 , respectivamente. Então,

$$\text{VAR}_1 = \alpha_1 \sigma P \quad \text{e} \quad \text{VAR}_2 = \alpha_2 \sigma P$$

Onde, σ é a volatilidade da carteira e P seu valor de mercado. Segue-se,

$$\text{VAR}_1 = (\alpha_1 / \alpha_2) \text{VAR}_2$$

A segunda diz respeito a convertibilidade de VAR's para diferentes períodos. Sendo os retornos independentes e com a mesma distribuição o VAR de n dias é igual a $\sqrt{n}$ vezes o VAR de um dia (DEAR). No entanto, esta facilidade é de aplicabilidade restrita pois, como notado por Diebold *at all* (1996), este resultado é válido somente no caso em que os retornos são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d), hipótese pouco plausível para ativos financeiros já que um fato estilizado de séries financeiras é que as volatilidades tendem a variar no tempo (heterocedasticidade).

2.1.1- Estruturas de Mapeamento

Em geral, um portfólio de uma instituição de grande porte é composto por milhares de diferentes tipos de ativos. O grande número de ativos de uma carteira cria dificuldades para estimação do VAR.

Do ponto de vista prático, torna-se computacionalmente custoso estimar a matriz de covariâncias Σ . Note que o número de parâmetros a estimar cresce geometricamente com o número de ativos da carteira, a cada novo ativo introduzido é preciso estimar outros n (número total de ativos da carteira após a introdução do novo ativo) parâmetros, o desvio padrão deste novo ativo e as $n-1$ covariâncias com todos os outros ativos da carteira. Além disso, para estimação da matriz de covariância é preciso contar com um banco de dados com séries históricas de todos ativos da carteira o que pode ser impossível para ativos de origem recente ou com pouca negociação no mercado.

Para reduzir a dimensão da matriz de covariância Σ a ser estimada e com isso, facilitar a implementação do método, foram criadas as chamadas estruturas de mapeamento. A metodologia de mapeamento adotada pelo *Riskmetrics* consiste em eleger um conjunto de ativos referência para as quais as posições de todos os outros ativos é mapeada. O *Riskmetrics* seleciona como ativos de referência as moedas mais negociadas, índices das principais bolsas do mundo, prazos padrões para ativos de renda fixa (vértices fixos da curva de juros). Utiliza-se, então, algumas técnicas para transformar posições nos ativos originais em posições sintéticas nos ativos referência, o mapeamento propriamente dito, para as quais calcula-se o VAR. Assim, por exemplo, uma posição numa determinada ação na bolsa brasileira é convertida em uma posição no índice IBOVESPA ou uma posição num ativo de renda fixa americana com uma data de vencimento (maturidade) qualquer é convertido em posições nos prazos referência. Mais a frente, apresenta-se em detalhes a técnica utilizada no mapeamento de opções, de ações e de instrumentos de renda fixa.

Exemplo 1: Mapeamento de Opções

A ampla literatura na área de opções mostra que estes instrumentos guardam uma relação não linear com o ativo subjacente. No caso do modelo de Black & Scholes (1973), certamente o modelo mais conhecido, o preço de uma *Call* depende, além do preço do ativo subjacente, de um conjunto de variáveis: taxa de juros livre de risco, tempo para o exercício, preço de exercício e do desvio padrão (volatilidade) do retorno do ativo subjacente. Segundo este modelo, a expressão do preço de uma Call européia é dada por:

$$C = S N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (4)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r_t + (1/2)(\sigma_t^2))(T-t)}{\sigma_t \sqrt{T-t}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma_t \sqrt{T-t}$$

onde, $N(x)$ é a função densidade acumulada de uma normal padrão, $T-t$ o tempo que resta para o exercício, E o preço de exercício, r_t a taxa de juros livre de risco e σ_t a volatilidade do ativo objeto. A expansão de Taylor do diferencial da função $F(S)$ é dada por:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{\partial F}{\partial E} dE + \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \frac{dS^2}{2!} + \dots + \frac{\partial F}{\partial r} dr + \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial t} dt + R \quad (5)$$

esta expansão evidencia as diversas fontes de variação do preço de uma opção. As diversas derivadas parciais da equação acima são conhecidas como gregas, respectivamente, da direita para a esquerda: Delta, Gamma, Rho, Vega e Theta. As gregas exprimem o risco de variação do preço de uma opção derivado de variações nos valores das variáveis que entram no modelo de Black & Scholes. Termos de ordem superior a 2 para S e 1 para as demais variáveis estão contidos no resto da expansão de Taylor R . Considerando nulos todos os diferenciais da expressão acima com exceção de dS tem-se:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial S} dS \quad (6),$$

Assim, uma posição em opção é equivalente, em termos de variação, a uma posição de delta unidades do ativo subjacente o que permite o mapeamento de posições de opções em posições no ativo subjacente.

Exemplo 2: Mapeamento de Instrumentos de Renda Fixa

Para os instrumentos de renda fixa o *Riskmetrics* seleciona um conjunto de prazos de vencimento, também chamados de vértices, para os quais efetua-se o cálculo de volatilidades e correlações. Para instrumentos com prazos diferentes dos referenciais é preciso encontrar uma posição equivalente nos vértices. O princípio adotado para cálculo é que a posição mapeada deve ter o mesmo valor de mercado e a mesma volatilidade da posição original. Como exemplo, suponha que deseje-se estimar o VAR para uma posição de 6 meses, como só existem vértices de 5 e 7 meses, então torna-se necessário a aplicação da estrutura de mapeamento.

A primeira restrição imposta é que o retorno da posição de 6 meses (I_6) deve ser igual a uma média ponderada entre os retornos das posições de 5 e de 7 meses, respectivamente, I_5 e I_7 :

$$I_6 = \alpha \cdot I_5 + (1-\alpha) \cdot I_7 \quad (7) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

O problema é encontrar α . Pela equação acima sabe-se que a variância dos retornos do instrumento de 6 meses tem que ser igual a:

$$\sigma_6^2 = \alpha^2 \sigma_5^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_7^2 + 2\alpha(1-\alpha) \rho_{5,7} \sigma_5 \sigma_7 \quad (8)$$

onde $\rho_{5,7}$ é a correlação entre os vértices 5 e 7. Supondo que σ_6 é uma combinação linear de σ_5 e σ_7 :

$$\sigma_6 = w \cdot \sigma_5 + (1-w) \cdot \sigma_7 \quad 0 \leq w \leq 1, \quad (9)$$

onde w é a distância relativa entre o vértice mapeado e os vértices de referência (no caso 0,5). Assim, nota-se que (8) é uma equação do segundo grau em α , resolvendo obtém-se:

$$\alpha = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} \quad (10)$$

onde,

$$a = \sigma_5^2 + \sigma_7^2 - 2\rho_{5,7}\sigma_5\sigma_7$$

$$b = 2\rho_{5,7}\sigma_5\sigma_7 - 2\sigma_7^2$$

$$c = \sigma_7^2 - \sigma_6^2$$

Escolhe-se a solução α que esteja entre 0 e 1. Com o valor obtido acha-se as posições nos vértices equivalentes e em seguida calcula-se o VAR para estas posições da maneira usual.

Exemplo 3: Mapeamento de Posições em Ações

Um resultado amplamente conhecido do modelo CAPM é que o retorno de uma ação específica (R_A) se relaciona com o retorno do mercado (R_m) - um ativo composto, por exemplo, um índice de ações - da seguinte forma:

$$R_A = \alpha_A + \beta_A R_m + \varepsilon_A \quad (11)$$

onde, α_A é uma constante específica à firma, $\beta_A R_m$ a parcela do retorno da ação que é explicada por movimentos do mercado e ε_A um componente aleatório específico à firma. Segue-se que a variância do retorno da firma é dada por:

$$\sigma_A^2 = \beta_A^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_A}^2 \quad (12)$$

Por (12) percebe-se que o risco da firma é composto de duas partes uma associada ao mercado e outra específica a ela. Então, o VAR de uma posição de valor P_A na ação é dado por:

$$VAR_A = - V_c \sigma_A P_A = - V_c P_A \sqrt{\beta_A^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon A}^2} \quad (13)$$

Se o risco específico for desprezível então o VAR torna-se:

$$VAR_A = - V_c \beta_A \sigma_m P_A \quad (14)$$

Desta forma, para o cálculo de risco, uma posição de P_A na ação é equivalente a uma posição de $\beta_A P_A$ no ativo de mercado. O problema com esta técnica de mapeamento é que ao desprezar o risco específico, procedimento este sem nenhuma justificativa, subestima-se o verdadeiro risco do ativo. Além disso, resta o problema de estimar o β da ação, portanto, não eliminando a necessidade de uma série histórica da ação.

2.1.2- Avaliação do Método Delta Normal

A grande vantagem do método Delta-Normal sobre outros métodos de mensuração de risco é a facilidade de sua implementação e rapidez com a qual os resultados são obtidos permitindo um cálculo instantâneo do VAR, mesmo para grandes portfólios. Este ponto não deve ser menosprezado pois, a velocidade na tomada de decisões é um componente essencial no mercado financeiro.

O custo pela simplificação é que o método deixa de lado importantes características das séries financeiras que podem levar a uma imprecisão no cálculo do risco de um determinado portfólio.

Em particular, uma característica presente na maioria das séries de retornos é a presença de excesso de curtose em relação a distribuição normal. Isto significa que a probabilidade de ocorrência de eventos extremos em séries financeiras tende a ser maior do que numa série que tenha distribuição normal. Assim, ao assumir-se normalidade no cálculo do

Value-at-Risk, o risco é subestimado. As propriedades das séries financeiras são discutidas com mais detalhes no próximo capítulo.

Além disso, este modelo ao aproximar a variação do preço de ativos não lineares, como as opções, por sua Expansão em Taylor em primeira ordem em torno do preço do ativo objeto dado pela equação (6), a abordagem delta-normal abstrai de uma série de outros fatores de risco destes ativos expressos na equação (5). Isto pode ser uma aproximação bastante grosseira em alguns casos. Por exemplo, devido a relação não linear entre o preço da opção e o preço do ativo subjacente, a abstração do risco *Gamma*, efeito de 2º ordem de variações no preço do ativo subjacente sobre o preço da opção, produz uma subestimação do risco de uma opção quando ocorrem grandes variações dos preços.

2.2- Simulação Histórica (HS)

Provavelmente, o método de simulação histórica é a abordagem mais direta e intuitiva para o cálculo do *Value-at-Risk* de uma carteira de ativos. A técnica consiste em aplicar os pesos atuais de cada ativo na carteira às respectivas séries históricas dos retornos destes ativos para obter uma série histórica dos retornos da carteira.

Numa carteira de n ativos sendo r_{it} o retorno do i -ésimo ativo no instante t e w_i o peso atual deste ativo então, a série histórica dos retornos da carteira para a qual deseja-se calcular o VAR seria dada por:

$$Y_t = \sum_{i=1}^n w_i y_{it} \quad t = 1, \dots, T \quad (15)$$

onde, T é o número de observações na série histórica dos retornos.

Em seguida, constrói-se a distribuição empírica destes retornos da qual se obtém o VAR ao nível de significância desejado achando o percentil equivalente. Por exemplo, numa série de 1000 observações de retornos da carteira, o VAR a 5% de significância é 50º maior perda na carteira.

Este método tem uma série de atrativos. Em primeiro lugar, trata-se de uma técnica não paramétrica o que implica dizer que não é necessário a estimação de nenhum parâmetro, como volatilidades e correlações, para obtenção do VAR. Com isso, evita-se problemas de modelagem e erros de estimações destes parâmetros.

Outra vantagem do método HS é que ele dispensa qualquer hipótese *a priori* sobre a distribuição dos retornos dos ativos. Em tese, sendo possível captar, implicitamente, características específicas a cada série como, por exemplo, excesso de curtose e assimetrias das distribuições que, como mencionado, são negligenciadas pelo modelo delta-normal. Além disso, como o retorno do portfólio está sendo calculado em cada instante do tempo, também considera-se de forma implícita os efeitos de não linearidades tais como o risco *Gamma*.. Por último, os recursos computacionais atualmente disponíveis tornam extremamente simples sua implementação.

Infelizmente, o método apresenta também algumas limitações. A hipótese que está implícita nesta técnica é que a distribuição empírica dos retornos é capaz de refletir a verdadeira distribuição dos retornos. Desta forma, o VAR estimado é extremamente sensível a janela utilizada para a construção da distribuição empírica do portfólio, inclusão ou não de períodos onde ocorreram grandes *outliers* ou de longos períodos de pouca oscilação nos retornos produzem grandes diferenças nos resultados. Este efeito é mais pronunciado quando o objetivo é estimar o VAR para níveis de significância muito baixos (menores que 1%).

Outro problema é a falta de adaptabilidade das estimativas, ou seja, incapacidade de perceber rapidamente mudanças estruturais no ambiente financeiro como mudanças de regimes cambiais ou aumento de instabilidade decorrente da desregulamentação de um determinado mercado. Isto acontece por que o método aplica pesos idênticos a todas observações da série histórica. Assim, eventos ocorridos num passado distante continuam tendo o mesmo peso nas estimativas que os eventos mais recentes. Este fato, é pouco intuitivo, uma vez que, as expectativas dos agentes econômicos atuantes no mercado financeiro tendem a ser muito mais influenciadas pelo ambiente atual. Para tomar um exemplo extremo, parece ser bastante razoável afirmar que a crise de 1929 tem papel

quase nulo para determinar a posição dos agentes no mercado nos dias de hoje. Não obstante, se as observações daquele período fossem incluídas na amostra, o método daria a mesma importância a elas para o cálculo do VAR que a observação do dia anterior.

Por último, fato notado por Danielsson e Vries (1997), o método de simulação histórica é bastante eficaz para estimação da distribuição dos retornos num intervalo concentrado ao redor da média, região na qual a distribuição empírica tende a ser bastante densa. No entanto, devido à característica discreta dos retornos extremos, o método produz uma estimativa bastante pobre das caudas, região de interesse para o cálculo do VAR, o que tende a gerar alta variabilidade nas estimativas do VAR. Os autores apontam, ainda, que a maior perda estimada por SH não pode ser, por definição, maior que a pior realização da série histórica.

É difícil chegar a uma conclusão definitiva sobre a robustez do método. Sua eficiência acaba se tornando uma questão empírica. Os resultados encontrados na literatura de *Value-at-Risk* são controversos. Artigos como Danielsson e Vries (1997), Kupiec (1995) chegam a resultados apontam para uma inferioridade do método em relação a outros como o delta-normal e o VAR de valores extremos. Enquanto, artigos como Mahoney (1996) e Jackson *et al* (1997) indicam superioridade da técnica de HS. Os resultados deste método para uma carteira de ativos brasileiros são apresentados num capítulo posterior.

3- MÉTODOS PARA ESTIMAÇÃO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS

No capítulo anterior, na apresentação do modelo normal, assumiu-se que os parâmetros da distribuição dos retornos, média e variância, fossem conhecidos. Na prática, na melhor das hipóteses, estão disponíveis somente séries históricas dos retornos destes ativos, ou seja, uma realização do processo estocástico gerador dos retornos. É preciso então utilizar técnicas que permitam a estimação destes parâmetros. Como adota-se a hipótese de média zero para os retornos, é necessário estimar somente a matriz de covariâncias.

Apresentam-se, a seguir, quatro técnicas para estimação da matriz de covariâncias: o método amostral, o suavizamento exponencial, o modelo GARCH e o método de volatilidade estocástica. Em geral, os modelos estatísticos desenvolvidos para estimação de volatilidade tentam reproduzir um conjunto de fatos estilizados comuns às séries de retornos dos ativos financeiros. Na seção seguinte apresenta-se um resumo dos principais fatos estilizados encontrados nas séries financeiras.

3.1- Fatos Estilizados

A especificação e seleção de modelos é sempre guiada por fatos estilizados empíricos. A capacidade de um modelo de reproduzir estes fatos é uma característica desejável e por outro lado a sua incapacidade de reproduzir é um critério para se rejeitar tal modelo.

Alguns dos fatos estilizados de séries de tempo financeiras são:

- (a) caudas pesadas: desde o trabalho de Mandelbrot (1963) e Fama (1963,1965) é reconhecido que retornos de ativos são leptocurticos. Como resultado, vários estudos tem proposto modelar retornos de ativos através de distribuições com caudas pesadas, por exemplo, Pareto-Lévy;
- (b) agrupamento de volatilidade: qualquer observação de séries temporais financeiras revela instantes de tempo de alta e baixa volatilidade que se agrupam. De fato, agrupamentos de volatilidade e caudas pesadas estão relacionados. Uma das

características dos modelos ARCH é a ligação entre dinâmica (condicional) da volatilidade e caudas pesadas (não condicional);

- (c) efeitos de alavancagem: Black (1976) observou que os movimentos de preço são negativamente correlacionados com a volatilidade. Se o preço dos ativos está em queda ocorre um aumento da alavancagem da firma e, em geral, também um aumento da incerteza, fatos que tendem a gerar aumento da volatilidade.
- (d) chegada de informações: usualmente retornos são mensurados em frequências fixas, por exemplo: dia, semana, mês. Alguns autores sugeriram relacionar explicitamente os retornos aos fluxos de informações que chegam ao mercado. De fato Clark (1973) é um dos primeiros a propor um modelo de volatilidade estocástica (SV) onde a chegada de informações é não uniforme no tempo e em geral não observada. Este fato está relacionado ao conceito de deformação temporal que pode ser diretamente ligada a volatilidade através de uma função que depende de volume, tempo entre cotações, anúncios com informações específicas ao ativo, notícias macroeconômicas e fechamento do mercado;
- (e) memória longa e persistência: volatilidade é altamente persistente. Em particular para dados de alta frequência existe evidência de que o processo gerador da variância condicional tem raiz próxima de unitária. Esta evidência fez com que a modelagem da persistência fosse feita através de modelos com raízes unitárias ou através de modelos de memória longa;
- (f) co-movimentos de volatilidade: existe uma extensa literatura sobre co-movimentos dos mercados especulativos internacionais. Globalização dos mercados financeiros aumenta a volatilidade dos preços;
- (g) correlação na volatilidade implícita: como a volatilidade implícita é calculada através do modelo de Black e Scholes, é, obviamente, baseada num modelo (*model-based*). Pelo fato da volatilidade ser calculada com base nos preços diários existe uma inconsistência, pois o modelo de Black-Scholes pressupõe que a volatilidade é constante. As propriedades estatísticas da série temporal de volatilidade implícita

podem ser aproximadas por modelos de reversão a média do tipo autorregressivo. Além disto, a volatilidade implícita deve conter informação a respeito da volatilidade futura e, portanto, deve ser um preditor desta última;

- (h) estrutura a termo da volatilidade implícita: o modelo de Black e Scholes pressupõe uma estrutura a termo constante para a volatilidade. Na realidade, a estrutura a termo da volatilidade implícita de opções *at-the-money* tem inclinação positiva quando a volatilidade de curto prazo é baixa e negativamente inclinada quando a volatilidade é alta;
- (i) *smiles*: é conhecido na literatura que a volatilidade implícita de Black e Scholes produz um vício conhecido na literatura por *smile effect* devido ao formato em U da volatilidade implícita para diferentes preços de exercício.

3.2- Método Amostral

Inicialmente, considere o problema da estimação das volatilidades (desvios padrões) dos retornos dos ativos. Assumindo média zero, a volatilidade amostral dos retornos do ativo i utilizando uma amostra de T observações é definido como:

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T y_{it}^2} \quad (16)$$

O cálculo do estimador utilizando toda amostra permite pouca adaptabilidade às informações mais recentes. Isto decorre do fato de que, como no modelo de simulação histórica, todas observações da amostra recebem o mesmo peso. Para contornar este problema, utiliza-se, ao invés de toda amostra, uma janela móvel com um número fixo de observações. Apesar de ainda manter peso igual para todas observações utilizadas na janela, consegue-se alguma flexibilidade, pois pode-se controlar a importância da observação mais recente através da escolha do tamanho da janela. No entanto, o uso deste

estimador apresenta outro sério inconveniente. Em geral, a ocorrência de eventos extremos nas séries financeiras se dá com relativa frequência. Como este estimador utiliza o mesmo peso para todas as observações da amostra, a volatilidade estimada dá um salto para cima após um retorno extremo permanecendo neste nível enquanto a observação permanecer na amostra. Quando a observação extrema sai da amostra a volatilidade salta para baixo novamente. Desta forma, em períodos subsequentes a grandes variações de preços dos ativos, volatilidade e, por conseqüência, o risco tende a ser superestimado.

Esta forma de cálculo é usada para a determinação de uma medida de dispersão de um conjunto de dados de diversas outras áreas de estudo, além da financeira. Com efeito, não existe uma preocupação com a reprodução dos fatos estilizados citados na seção anterior. Isto faz com que sua aplicabilidade no cálculo da volatilidade dos retornos de ativos financeiros seja bastante limitada.

3.3- Suavização Exponencial

A técnica de suavização exponencial é uma tentativa de contornar a limitação do método amostral. Neste caso, o estimador da variância dos retornos do ativo i na data t é dado por:

$$\sigma_{t,i}^2 = \lambda \cdot \sigma_{t-1,i}^2 + (1-\lambda) \cdot y_{t-1,i}^2 \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (17)$$

A variância do retorno num dado instante é composto por dois termos. O primeiro, um termo autorregressivo expressando a dependência temporal da variância dos retornos, fato estilizado encontrado em séries financeiras. O segundo, representando a contribuição da observação mais recente para a variância estimada. A expressão (17) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\sigma_{T,i}^2 = \lambda^T \cdot \sigma_{0,i}^2 + (1-\lambda) \sum_{t=1}^T \lambda^t \cdot y_{T-t,i}^2 \quad (18)$$

Por (18) a estimativa da variância dos retornos é igual a da variância inicial mais uma soma com pesos geometricamente declinantes dos quadrados dos retornos. A influência da variância inicial sobre a variância presente tende a zero com o número de observações. Um candidato natural a estimador deste termo é o estimador (16) com uma janela arbitrária. O segundo termo faz com que o efeito de choques nas séries de retornos sejam dissipados suavemente com o tempo. Note que (16) é o caso particular de (18) com $(1-\lambda)\lambda^t = 1/(T-1) \quad \forall t \leq T$.

O mesmo princípio pode ser estendido para estimação da covariância dos retornos de dois ativos. A covariância entre os retornos i e j é dada por:

$$\sigma_{t,ij}^2 = \lambda \cdot \sigma_{t-1,i} \sigma_{t-1,j} + (1-\lambda) \cdot y_{t-1,i} \cdot y_{t-1,j} \quad (19)$$

Da mesma forma que no cálculo das variâncias, a covariância inicial pode ser estimada pela covariância amostral calculada com uma janela fixada arbitrariamente.

A escolha do parâmetro λ é *ad hoc* no sentido de que não envolve nenhum procedimento estatístico que gere uma estimativa a partir das observações passadas. No *Riskmetrics* é sugerido um procedimento para a escolha de um λ ótimo baseado no erro de predição um passo a frente.

O preditor da variância do retorno um passo a frente é definido como $E(y_{t+1}^2) = \sigma_{t+1|t}^2$. Definindo o erro de predição um passo a frente como sendo $\varepsilon_{t+1|t} = y_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2$, segue-se que $E(\varepsilon_{t+1|t}) = 0$. Partindo destes conceitos, um critério razoável para a escolha do λ ótimo de cada ativo seria tomar o λ que minimizasse a soma dos erros de predição um passo a frente:

$$RMSE_i = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2(\lambda))^2}$$

Para garantir que a matriz de covariâncias seja positiva semi-definida o *Riskmetrics* sugere o uso do mesmo λ para todas as séries calculado da seguinte forma:

Seja Π a soma do RMSEs mínimos τ_i :

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \tau_i$$

Define-se a medida de erro relativo:

$$\theta_i = \frac{\tau_i}{\sum_{i=1}^N \tau_i}$$

Tomando o conjunto de pesos dados por:

$$\phi_i = \frac{\theta_i^{-1}}{\sum_{i=1}^N \theta_i^{-1}}$$

O $\bar{\lambda}$ ótimo é então definido como:

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^N \phi_i \hat{\lambda}_i \quad (20)$$

onde, $\hat{\lambda}_i$ é o fator ótimo para o ativo i .

O mesmo procedimento poderia ser utilizado para o λ empregado no cálculo das covariâncias. Ainda para que a matriz de covariâncias seja positiva semi-definida, o *Riskmetrics* utiliza no cálculo das covariâncias o mesmo λ escolhido para o cálculos das variâncias. A propósito, na literatura de controle de risco o modelo que ficou conhecido como *Riskmetrics* é o modelo delta-normal com estimação por suavizamento exponencial da matriz de covariâncias.

O modelo de suavizamento exponencial tem maior capacidade de reproduzir os fatos estilizados citados na seção 3.1 do que o modelo amostral. A principal característica do modelo é que um valor de λ próximo de 1 reproduz o fato estilizado (e), segundo o qual a volatilidade é altamente persistente. Contudo, o fato da soma dos parâmetros do modelo

(λ e $1-\lambda$) ser igual a um gera um inconveniente, a volatilidade não condicional dos retornos é igual a zero. Como resultado, a distribuição não condicional dos retornos é degenerada, ou seja, sua média e variância são iguais a zero. Desta forma, toda massa da distribuição fica concentrada num único ponto, fato sem nenhum apoio empírico.

3.4- Modelos Família GARCH

Como dito na seção 3.1, em séries de retornos financeiras é comum o fato de que grandes valores num determinado instante do tempo sejam seguidos por valores também elevados nos períodos subsequentes, não necessariamente na mesma direção, fato estilizado (b). Estatisticamente, esta característica pode ser descrita pela presença de elevada autocorrelação no quadrado dos retornos. A autocorrelação presente no quadrado dos retornos das séries financeiras faz com que a variância condicional dos retornos apresente uma dependência temporal dos choques passados.

O modelo de suavizamento exponencial apresentado na seção anterior captura esta característica destas séries, pois, como demonstrado, a estimativa da variância dos retornos é igual a da variância inicial mais uma soma com pesos geometricamente declinantes dos quadrados dos retornos. O problema com este modelo é que não existe um critério estatístico para estimação do parâmetro λ que leve em consideração as propriedades específicas de cada série de retorno. Desta forma, não é possível realizar inferência sobre as estimativas do modelo.

Um modelo mais genérico para a estimação da variância condicional dos retornos é o ARCH proposto por Engle (1982). Este modelo expressa a

variância condicional como uma defasagem distribuída do quadrado dos retornos passados. Seja

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (21)$$

$$E_t(y_t^2) = \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 = \omega + \alpha(L) y_t^2 \quad (22) \quad \text{sendo} \quad \alpha(L)$$

um

polinômio no operador defasagem do tipo $\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_p L^p$ ¹ e, para garantir a não negatividade da variância condicional: $\omega, \alpha_i > 0$.

O modelo acima possui algumas propriedades desejáveis. Em primeiro lugar, através da técnica de decomposição de erros de predição, é possível construir a função de verossimilhança o que permite a estimação dos parâmetros pelo método de máxima verossimilhança. Esta propriedade é importante porque estes estimadores possuem distribuições conhecidas que viabilizam a execução de testes de hipóteses diversos. Além disso, é possível provar que este modelo implica uma distribuição não condicional com caudas pesadas para os retornos, fato estilizado (a).

Em geral, existe uma alta persistência na volatilidade das séries de retornos, fato estilizado (e), o que faz com que o valor de q no modelo ARCH seja elevado implicando a estimação de um grande número de parâmetros. O modelo GARCH, proposto por Bollerslev (1986), constitui-se numa tentativa de expressar de forma mais parcimoniosa a dependência temporal da variância condicional. Neste modelo a variância condicional, além de

¹ L é tal que $L.y_t = y_{t-1}$

depende do quadrado dos retornos passados como no modelo ARCH, depende também dos passados das próprias variâncias condicionais. A variância condicional num modelo GARCH(p,q) é expressa por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 = \omega + \alpha(L)y_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \quad (23)$$

sendo $\alpha(L)$ e $\beta(L)$ polinômios no operador defasagem L . A condição de não negatividade da variância condicional neste modelo é dada por: $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ para $i = 1, \dots, q$ $j = 1, \dots, p$

Por simples manipulação da equação acima, pode-se escrever:

$$y_t^2 = \omega + (\alpha(L) + \beta(L))y_t^2 + (1 - \beta(L))\eta_t$$

onde, $\eta_t = (y_t^2 - \sigma_t^2)$ é uma martingale a diferença não Gaussiana.

Esta representação evidencia que um modelo GARCH(p,q) é um modelo ARMA(p,q) no quadrado dos retornos. Esta característica permite a utilização de técnicas convencionais dos modelos da classe ARMA para a identificação de p e q .

Para garantir que este processo ARMA para o quadrado dos retornos seja covariância estacionário, as raízes de:

$1 - \alpha(L) - \beta(L) = 0$ tem que estar fora do círculo unitário. Com a condição de não

negatividade satisfeita, isto é garantido se $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$. Valendo esta condição, a

variância não condicional de y_t^2 é dada por:

$$E(y_t^2) = E(\sigma_t^2) = \sigma = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i} \quad (24)$$

e a esperança condicional da variância n passos a frente é igual a:

$$E_t(\sigma_{t+n}^2) = \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^n \left(\sigma_t^2 - \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i} \right) + \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{i=1}^p \beta_i} \quad (25)$$

o que significa que existe uma tendência para a variância condicional retornar ao valor da variância não condicional.

Se $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i = 1$ então o processo ARMA para y_t^2 possui uma raiz unitária. Nelson (1990) nomeou o modelo em que esta condição se verifica de GARCH integrado ou IGARCH. Se y_t segue um IGARCH, então sua variância não condicional é infinita e os processos y_t e y_t^2 não satisfazem a definição de processos covariância estacionários. No entanto, ainda é possível que y_t atende as condições de estacionaridade estrita no sentido de que sua densidade não condicional não varia no tempo. Esta propriedade é demonstrada em Nelson (1990).

O processo EWMA definido anteriormente é, portanto, um IGARCH com $\omega = 0$ com os parâmetros fixados arbitrariamente. Neste modelo, os retornos teriam distribuição degenerada, isto é, sua distribuição não condicional teria média zero e variância indeterminada. Desta forma, ao assumir que os retornos de determinado ativo tem variância condicional definida por um EWMA está-se, na verdade, fazendo uma restrição que pode não ser justificada pelos dados. Metodologicamente, o procedimento mais indicado seria estimar um GARCH e então testar a hipótese de que os parâmetros aceitam uma restrição do tipo $\omega = 0, \alpha + \beta = 1$. Isto garantiria a estimação de um modelo coerente com a realização do processo estocástico dos retornos. Entretanto, testar estas duas restrições, conjuntamente, é complicado, pois, sob a hipótese nula, a distribuição seria degenerada.

O modelo GARCH pode ser generalizado para o caso multivariado. Considerando um GARCH(p,q) para N ativos. Seja o vetor de retornos $n \times 1$ y_t com matriz de covariâncias

condicionais dadas por Σ_t tem-se que $\text{vech}(\Sigma_t)$ é relacionado com $\text{vech}(\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t')$ e com $\text{vech}(\Sigma_{t-1})$ através de:

$$\text{vech}(\Sigma_t) = \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^p \boldsymbol{\Psi}_i \text{vech}(\Sigma_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \boldsymbol{\Lambda}_j \text{vech}(\mathbf{y}_{t-j} \mathbf{y}_{t-j}') \quad (26)$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é um vetor com $N(N+1)/2$ elementos e $\boldsymbol{\Psi}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ são matrizes $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$. Portanto, o número total de parâmetros deste modelo é igual a $(p+q)N^2(N+1)^2/2 + N(N+1)/2$. Este é o maior inconveniente deste modelo, o número de parâmetros cresce rapidamente com N impossibilitando sua estimação. Por exemplo, um GARCH (1,1) com $N=5$ o número de parâmetros totais é igual a 465. Outra complicação destes modelos é garantir que Σ_t seja positiva semi-definida.

A literatura de GARCH multivariados se concentra em achar restrições plausíveis sobre Σ_t que reduzam o número total de parâmetros a serem estimados e, ao mesmo tempo, façam que esta matriz de covariâncias seja positiva semi-definida.

Em Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988) sugere-se impor que as matrizes $\boldsymbol{\Psi}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ sejam diagonais o que implica que o elemento (i,j) de Σ_t no caso em que $p=q=1$ seja representado por:

$$\sigma_{ij,t}^2 = \omega_{ij} + \beta_{ij} \sigma_{ij,t-1}^2 + \alpha_{ij} y_{it-1} y_{jt-1} \quad (27)$$

Neste modelo a condição para que a matriz Σ_t seja positiva semi-definida é que as matrizes de parâmetros $[\omega_{ij}]$, $[\alpha_{ij}]$ e $[\beta_{ij}]$ sejam todas positivas semi-definidas.

Neste caso particular tem-se um total de $3N(N+1)/2$ parâmetros a serem estimados. Portanto, para $N=5$ o total de parâmetros reduz-se para 45.

Outra especificação simplificadora deste modelo é apresentada em Engle, Ng e Rothschild (1990). Neste artigo os autores sugerem a seguinte estrutura dinâmica para a matriz de covariâncias condicional:

$$\Sigma_e = \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \lambda_{kt} + \Omega \quad (28)$$

onde Ω é uma matriz $N \times N$ positiva semi-definida, β_k são vetores linearmente independentes não estocásticos e λ_{kt} são variáveis aleatórias positivas que representam os fatores que afetam os segundos momentos condicionais dos retornos. Neste modelo é garantido que Σ_t seja sempre positiva semi-definida.

Outra propriedade importante deste modelo é que sempre é possível construir portfólios cujas variâncias condicionais podem substituir os fatores λ_{kt} . Isto significa que Σ_t pode sempre ser rescrita na forma:

$$\Sigma_e = \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' \theta_{kt} + \Omega^*$$

onde θ_{kt} são as variâncias condicionais de alguns portfólios apropriadamente construídos.

Em Bollerslev (1990) é apresentado um modelo GARCH multivariado onde a redução no número de parâmetros a serem estimados é obtida através da imposição da hipótese de que as variâncias e covariâncias condicionais evoluem no tempo, mas as correlações condicionais são invariantes. Portanto, a evolução no tempo das covariâncias está ligada a evolução das variâncias. O modelo é dado por:

$$Y_{it} = \mu_i + \varepsilon_{it}$$

$$\sigma_{ii,t} = \omega_i + \beta_{i1} \sigma_{ii,t-1}^2 + \alpha_{i1} \varepsilon_{it-1}^2 \quad (29)$$

$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} (\sigma_{ii} \sigma_{jj})^{1/2} \quad (30)$$

onde ρ_{ij} é a correlação condicional entre os retornos dos ativos i e j , σ_{ii} a variância condicional do retorno do ativo i e σ_{ij} a covariância condicional entre os retornos dos ativos i e j .

3.5- Volatilidade Estocástica:

A idéia básica do modelo de volatilidade estocástica é tratar a volatilidade como um componente não observado com seu logaritmo sendo diretamente modelado como um processo autorregressivo. A estrutura desta classe de modelos é uma discretização dos processos estocásticos em tempo contínuo a partir dos quais são construídas generalizações do modelo de Black & Scholes como em Hull e White (1987).

O modelo SV (*Stochastic Volatility*) univariado foi proposto por Taylor (1980) e tem a seguinte estrutura (na forma discreta):

$$y_t = \varepsilon_t \exp(h_t / 2) \quad (31)$$

$$h_{t+1} = \gamma_0 + \gamma_1 h_t + \eta_t \quad (32)$$

$\varepsilon_t \sim \text{NID}(0, 1)$ e $\eta_t \sim \text{NID}(0, \sigma_\eta^2)$ o que implica em : $y_t \mid h_t \sim N(0, \exp(h_t))$.

Assim, h_t é a log-volatilidade, um componente não observado. Se $|\gamma_1| < 1$ então h_t é estritamente estacionário com média $\gamma_0 / (1 - \gamma_1)$ e variância $\sigma_\eta^2 / (1 - \gamma_1^2)$. Como r_t é o produto de dois processos estritamente estacionários, segue-se que y_t também é estritamente estacionário. É possível provar, ainda, que r_t apresenta excesso de curtose em relação à distribuição normal capturando o fato estilizado (a). Este modelo pode ser rescrito da seguinte forma:

$$\log y_t^2 = h_t + \ln \varepsilon_t^2, \quad (33)$$

$$h_{t+1} = \gamma_0 + \gamma_1 h_t + \eta_t \quad (34)$$

esta versão nos logs é uma representação de espaço-estado linear para o modelo onde a primeira equação seria a equação de medida e a segunda a equação de transição.

A classe de modelos de volatilidade estocástica (SV) tem sua origem tanto em finanças matemática quanto em econometria de finanças. Por exemplo, Clark (1973) sugere modelar retornos de ativos como função de um processo aleatório da chegada de informação ao mercado. Esta abordagem chamada de deformação temporal implica num modelo para o retorno de ativos com volatilidade que varia ao longo do tempo. Tauchen e Pitts (1983) propõem uma mistura de distribuições com dependência temporal na chegada de informação. Hull e White (1987) propõem um modelo de precificação de opções Européias assumindo que o ativo subjacente segue um modelo de volatilidade estocástica a tempo contínuo. Uma outra abordagem surgiu do trabalho de Taylor (1986) que especifica um modelo de volatilidade estocástica a tempo discreto como uma alternativa ao modelo autorregressivo com heterocedasticidade condicional (ARCH). Até pouco tempo a estimação do modelo de Taylor, ou de qualquer outro modelo da classe SV, era bastante difícil, mas técnicas modernas de econometria permitiram que a estimação desta classe de modelos se tornasse factível. Com isso esta classe se tornou uma alternativa aos modelos ARCH.

Os modelos SV são capazes de reproduzir alguns dos fatos estilizados apresentados acima. Considere o modelo SV dado por (31) e (32) com y_t representando o retorno de um ativo e h_t o log da volatilidade que é um componente não observado relacionado a nova chegada de informação ao mercado, fato estilizado (d). Devido a estrutura do modelo pode-se mostrar que a distribuição de y_t , gerada por este modelo, tem caudas pesadas, fato estilizado (a). Além disto, devido a estrutura autorregressiva do log da volatilidade ela gera agrupamentos de volatilidade, fato estilizado (b). Se os choques que influenciam os retornos e o log da volatilidade, isto é, ε_t e η_t , respectivamente, são negativamente correlacionados tem-se o efeito alavancagem, fato estilizado (c). As evidências empíricas na estimação deste modelo são de que γ_1 é muito próximo de 1 implicando em alta persistência ou mesmo em memória longa, fato estilizado (e). Este modelo é facilmente generalizado para vários retornos e num mundo multivariado podemos ter estruturas autorregressivas comuns entre os log volatilidades que geram os co-movimentos em volatilidade, fato estilizado (f).

A maior dificuldade com os modelo SV é que não se pode obter explicitamente expressões para as funções de verossimilhança como no caso de outros modelos de volatilidade condicional tais como os da família GARCH. Existem uma série de métodos de estimação para contornar este problema dentre eles temos: método generalizado de momentos (GMM), método de quase máxima verossimilhança (QMV) e Método das Cadeias de Markov de Monte Carlo (MCMC).

O GMM foi proposto por Hansen (1982) como uma generalização do método dos momentos. A idéia do método dos momentos é usar como estimativa dos parâmetros de uma distribuição o estimador que mais aproxima os momentos amostrais dos momentos populacionais. O problema com este método aparece quando existem mais momentos do que parâmetros a estimar. O GMM soluciona isto adotando uma estrutura de pesos para cada momento amostral que reflete a importância dada ao seu “matching” com o momento populacional. É possível determinar otimamente estes pesos bem como o número de momentos a serem utilizados na estimação.

Apesar da facilidade de implementação o GMM apresenta alguns inconvenientes. O método apresenta um baixo desempenho quando h_t não é estacionário (γ_1 igual a 1), fato comum em muitas séries de alta frequência. Além disso, não se obtém do GMM uma estimativa de h_t , a variável de interesse quando o objetivo é estimação do risco, faz-se necessário, então, a implementação de um segundo método.

A idéia do método de quase-máxima verossimilhança é tratar $\ln \varepsilon_t^2$ e η_t em (33) e (34) como se fossem normais e maximizar a função de verossimilhança obtida através da aplicação do filtro de Kalman na estrutura de representação em espaço-estado do modelo. Os estimadores assim obtidos serão assintoticamente normais.

Estudos realizados com base em simulações² indicam que os estimadores de QML apresentam um erro quadrático médio menor que os de GMM quando a persistência na

²Ruiz (1994), Harvey e Shephard (1996), Jaquier, Polson e Rossi (1994), Andersen e Sorensen (1993) e Breidt e Carriquiry (1995).

volatilidade é relativamente forte. A intuição deste resultado vem do fato de que, neste caso, o termo normal η_t da equação de transição domina o termo não normal $\log \varepsilon_t^2$ da equação de medida. Quando a volatilidade é fraca os estimadores de GMM apresentam melhores resultados. Além de ser fácil sua implementação computacional, o método de QML tem a vantagem adicional de gerar estimativas filtradas e suavizadas da variável de estado h_t bem como suas previsões.

O método MCMC tem como princípio obter estimativas de h_t utilizando sua distribuição condicional em y_t . Inicialmente, constrói-se esta distribuição condicional com base em condições iniciais sobre h_t , em seguida utilizam-se algoritmos que geram as estimativas seguintes para h_t e as utilizam para atualizar a função densidade. Este amostrador tende a convergir para as estimativas, no entanto, o número de *loops* requerido pode ser bastante grande. O problema de autocorrelação nas amostras assim geradas pode ser eliminado utilizando *multimove samplers*, que consiste em retirar mais de um elemento da função densidade em cada instante do tempo. A dificuldade de implementação computacional deste método torna extremamente difícil sua utilização prática. Paralelamente, o debate sobre sua aplicabilidade em modelos SV ainda não está consolidado.

Nesta dissertação pretende-se estimar os modelos SV através do método de quase-máxima verossimilhança porque, dentre os métodos que citamos, é o que apresenta os melhores resultados em relação ao custo de implementação. Destacando que esta forma de estimação gera diretamente estimativas da volatilidade, nossa variável alvo, e que já existem rotinas prontas para seu emprego em modelos SV.

Uma generalização para o caso multivariado é proposta em Harvey *et al.* (1994). Seja y_t agora um vetor $N \times 1$ cujos elementos são dados por:

$$y_{it} = \varepsilon_{it} \exp(h_{it} / 2), \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (35)$$

onde, y_{it} é a observação em t da série i e $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{Nt})'$ é um vetor normal multivariado com média zero e matriz de covariância Σ_ε cujos termos da diagonal principal são iguais a 1 e os termos fora desta diagonal são denotados por ρ_{ij} . Como em (22), as log-variâncias são geradas por:

$$h_{it} = \gamma_{i0} + \gamma_{i1} h_{it-1} + \eta_{it}, \quad i = 1, \dots, N \quad (36)$$

onde, $\eta_t = (\eta_{1t}, \dots, \eta_{Nt})'$ é normal multivariado com média zero e matriz de covariâncias Σ_η . Aplicando a mesma transformação que no caso univariado obtém-se a representação espaço-estado do modelo:

$$w_t = h_t + \xi_t \quad (37)$$

$$h_t = \gamma_0 + \gamma_1' h_{t-1} + \eta_t \quad (38)$$

onde, w_t e ξ_t são vetores $N \times 1$ com elementos $w_{it} = \log r_{it}^2$ e $\xi_{it} = \log \varepsilon_{it}^2$, respectivamente. Tratando (37) e (38) como um modelo espaço-estado Gaussiano os estimadores de quasi-maximaverossimilhança podem ser obtidos através do uso do filtro de Kalman.

Como demonstrado em Harvey *et al.* (1994), o elemento ij da matriz de covariâncias de ξ_t , denotada por Σ_ξ , é dado por $(\pi^2/2)\rho_{ij}^*$, onde $\rho_{ii}^* = 1$ e

$$\rho_{ij}^* = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(1/2)_n n} \rho_{ij}^{2n} \quad i \neq j, i, j = 1, \dots, N \quad (39)$$

onde, $(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1)$. Desta forma, os valores absolutos de ρ_{ij} , as correlações entre os diferentes ε_{it} 's, podem ser estimados, mas os seus sinais não podem porque a informação relevante foi perdida quando as observações foram elevadas ao quadrado. No entanto, o sinal pode ser estimado voltando para as observações não transformadas e lembrando que o sinal de cada par $\varepsilon_i \varepsilon_j$ é igual ao sinal do respectivo par $y_i y_j$. Desta forma o sinal de ρ_{ij} pode ser estimado como positivo se mais da metade dos pares $y_i y_j$'s forem positivos e negativo caso contrário.

4- DESCRIÇÃO DOS E AVALIAÇÃO DOS MODELOS

4.1 – Descrição dos Ativos

4.1.1- Contratos Futuros

Definição

Um contrato futuro é uma promessa de compra e venda de um bem, com preço preestabelecido, em que o comprador tem a obrigação de pagar o valor previamente contratado ao vendedor numa determinada data. O vendedor, por sua vez, tem a obrigação de entregar o bem, ao preço acordado, no local, na quantidade e qualidade previamente estabelecidos. Estes contratos tem uma padronização de quantidade, qualidade, data de vencimentos e são garantidos pelas bolsas onde são negociados. A padronização é importante para facilitar sua negociação tornando-os mais líquidos.

Formação de preços

Os contratos futuros são um tipo de derivativo, pois seu preço deriva do preço do bem ao qual se refere, o ativo subjacente. A formação do preço deste derivativo está ligada a uma condição de não arbitragem, ou seja, seu preço tem que ser tal que, através de operações de compra e venda do futuro e do ativo subjacente no mercado, só é possível obter retornos iguais ao retorno do ativo livre de risco da economia.

Para exemplificar, suponha um contrato futuro de soja com vencimento em 20 dias úteis seja negociado a R\$ 105. Assuma, ainda, que a taxa de juros para 20 dias úteis seja igual a 2% e que o preço atual da soja, com as mesmas características especificadas no contrato, seja igual a R\$ 100. Este conjunto de preços permite a montagem de uma estratégia que garante um lucro livre de risco. A estratégia consiste em tomar emprestado R\$ 100 no mercado, comprar a soja com estes recursos e, simultaneamente, vender o contrato futuro. Na data de vencimento do contrato, entrega-se a soja ao preço preestabelecido de R\$ 105 e, com os recursos desta venda, quita-se o empréstimo

acrescido dos juros num total de R\$ 102. A operação garante, portanto, um lucro de R\$ 3 livre de risco. Deve-se destacar que, neste exemplo, assume-se que não existe custo de estocar a soja comprada no início da operação e que é possível tomar dinheiro no mercado a taxa de juros vigente.

O exemplo acima indica que o preço do contrato futuro que não permite arbitragem, conhecido preço justo do contrato, tem que ser igual a:

$$F = S.(1+i)^n + E_n + C \quad (40)$$

onde,

F: preço justo do futuro

S: preço do ativo objeto do contrato no mercado a vista

i: taxa de juros por período

n: períodos para o vencimento do contrato

E_n : custo de carregamento do ativo objeto por n períodos

C: outros custos (por exemplo, custo de corretagem)

Qualquer desvio deste preço induz os agentes do mercado a adotar uma estratégia de arbitragem que tende a restabelecer o preço justo no mercado.

Sistema de Ajustes Diários

Num mundo ideal onde não existisse risco de crédito, ou seja, em que não existisse dúvida sobre a capacidade dos agentes honrarem os contratos, seria possível que a negociação dos contratos futuros fosse realizada sem que as partes envolvidas colocassem nenhum volume de recursos no início da operação. Na prática, como a possibilidade de inadimplência é um fato, as bolsas onde são negociados os contratos futuros solicitam que os participantes depositem uma garantia chamada de “margem de

garantia” ao realizar uma operação. Esta margem é executada caso uma das partes não honre o compromisso firmado no contrato.

Para reduzir a margem requerida e, ao mesmo tempo, reduzir o risco de crédito das operações foi criado o sistema de ajuste diário. Segundo este sistema, aqueles que possuem posições em contratos futuros pagam ou recebem, diariamente, a variação no valor de mercado do seu contrato. Para o cálculo do valor de mercado da posição é utilizado, como referência, o chamado preço de ajuste do contrato, que pode ser o preço do último negócio ou, para evitar manipulações do mercado, uma média dos preços dos negócios num determinado período do dia. Desta forma, os participantes deste mercado estão sempre comprados ou vendidos no último preço de ajuste. Este sistema reduz a necessidade de margens, pois é necessário ter garantias para cobrir a variação no valor da posição somente entre a data em que é detectado o não pagamento de um ajuste e data em que a posição do inadimplente é liquidada.

Para exemplificar esta sistemática, toma-se o caso de um agente que compra um futuro por R\$100 num dia em que o preço de ajuste fica em R\$102. O agente recebe então da bolsa R\$2. No dia seguinte, o preço de ajuste fica em R\$98. Neste dia então, o agente é obrigado a pagar R\$4. No terceiro dia o contrato encerra sua posição vendendo o contrato a 100. Neste dia ele recebe R\$2.

Contrato futuro de taxa média de depósitos interfinanceiros de 1 dia

No mercado brasileiro, a taxa de juros cobrada por um empréstimo de um dia entre instituições financeiras recebe o nome de taxa de certificados interbancários (CDI). A taxa de CDI flutua em torno da taxa de SELIC que é a taxa pela qual o Banco Central brasileiro realiza operações de captação e doação de recursos no mercado.

A taxa SELIC é a taxa com a qual o Banco Central realiza a política monetária. Ao fixar um alvo para esta taxa a autoridade monetária dá um balizamento de juros para toda a economia. Em particular, a sistemática de operação do sistema financeiro gera uma relação direta entre a taxa de CDI e a taxa de SELIC. Consequentemente, as expectativas sobre o comportamento futuro da taxa de CDI estão diretamente relacionadas com as

expectativas sobre a condução da política monetária pelo Banco Central, particularmente, a expectativa sobre a trajetória futura da taxa SELIC.

Diariamente, o sistema bancário realiza uma série de operações financeiras no mercado. As movimentações de recursos entre uma instituição e outra e entre estas instituições e o Banco Central são realizadas através de débitos e créditos nas chamadas contas reservas bancárias, uma conta corrente não remunerada destas instituições. O saldo líquido destas operações nem sempre é nulo, uma instituição pode acabar com saldo positivo ou negativo na sua conta reserva. Se o saldo é positivo, então a instituição, para não perder a rentabilidade sobre os recursos excedentes, tem que doar estes recursos no mercado. Por outro lado, se o saldo é negativo, a instituição tem a necessidade de tomar recursos no mercado para cobrir o saldo devedor na sua conta reserva.

A taxa SELIC, é taxa pela qual o Banco Central se compromete a dar e tomar reservas no mercado. Os empréstimos feitos no SELIC são creditados na conta reserva no mesmo dia ou, na linguagem do mercado, eles viram reserva em d zero. A taxa SELIC acaba dando o balizamento para as demais taxas praticadas no sistema como, por exemplo, as taxas cobradas em empréstimos ao setor privado. Isto porque uma instituição com sobra de recursos para emprestar não os ofertará por uma taxa inferior à taxa SELIC, pois tem a opção de emprestar ao BC por esta taxa. Similarmente, uma instituição com necessidade de recursos pode sempre captar estes recursos junto ao BC pela taxa SELIC.

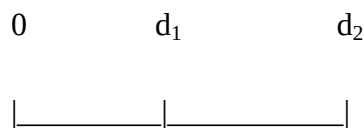
A taxa de CDI é a taxa praticada em empréstimos de uma instituição financeira e outra e entre as instituições e o setor privado. Os empréstimos no CDI se tornam reserva no dia seguinte, na linguagem do mercado, viram reserva em $D + 1$. Desta forma, taxa de CDI praticada em um determinado dia tem que ser igual a expectativa de taxa SELIC para o próximo dia. Esta relação entre as taxas de CDI e a SELIC existe porque uma instituição que necessite de recursos para o dia seguinte tem duas opções: tomar o dinheiro hoje no CDI ou deixar para tomá-lo no dia seguinte no SELIC. Assim, por exemplo, se existe uma expectativa de queda da taxa SELIC, a taxa de CDI tem que ficar abaixo da taxa SELIC, caso contrário, ocorrerá uma redução na demanda por recursos no CDI que produzirá uma queda no CDI até que o equilíbrio seja restabelecido.

O contrato futuro de DI, negociados na Bolsa de Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&F), é um contrato sobre a taxa de CDI acumulada do dia de sua negociação até o seu vencimento. O valor final do contrato é estabelecido pela bolsa em 100.000 pontos sendo que cada ponto vale R\$ 1. Os contratos sempre vencem no primeiro dia útil do mês de referência. A negociação se dá sobre o valor presente do contrato, o chamado PU (preço unitário). O PU é igual ao valor final do contrato (100.000) descontado pela expectativa do mercado de taxa de CDI acumulada até a data de vencimento. Assim, existe uma relação inversa entre um dado PU e a taxa de CDI esperada até o seu vencimento. Esta relação é facilmente obtida utilizando-se a expressão de valor presente. Seja PU_x o preço unitário de um contrato que vence na data x , e i_x a taxa de CDI esperada até o vencimento do contrato, então:

$$i_x = \left(\frac{100.000}{PU_x} - 1 \right) \quad (41)$$

Portanto, um aumento na taxa de juros esperada pelo mercado até o vencimento do contrato, i_x , reflete-se numa queda de PU_x .

Também, através dos contratos futuros de DI, pode-se calcular as chamadas taxas de juros *fowards* do mercado. As taxas *fowards* são as taxas de juros esperadas pelo mercado para vigorar num período no futuro. Por exemplo, no dia 0 considere duas datas no futuro, d_1 e d_2 :



Utilizando os contratos de DI é possível obter a taxa de juros *foward* para o período compreendido entre d_1 e d_2 . Para simplificar, suponha que nestas datas vençam os contratos cujos PUs sejam dados, respectivamente, por PU_1 e PU_2 . Pela fórmula de valor presente, sabe-se a taxa de juros esperada para o período entre 0 e d_1 , denotada por i_1 , guarda a seguinte relação com PU_1 :

$$1+i_1 = \frac{10^5}{PU_1}$$

Da mesma forma, a taxa de juros entre 0 e d_2 tem a seguinte relação com PU_2 :

$$1+i_2 = \frac{10^5}{PU_2}$$

Sendo i_f a taxa de juros entre d_1 e d_2 , vale a seguinte relação:

$$1+i_2 = (1+i_1)(1+i_f) \Rightarrow$$

$$1+i_f = \frac{1+i_2}{1+i_1}$$

e, aplicando a relações acima tem-se, finalmente:

$$1+i_f = \frac{PU_1}{PU_2} \quad (42)$$

De maneira geral, o retorno (y_t) de um ativo qualquer é definido como:

$$Y_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 ,$$

onde P_t é o preço deste ativo no instante t e P_{t-1} o preço no instante anterior. Quando se trata de contratos futuros, estes preços são o preço de ajuste dos contratos. É comum também a utilização do retornos logarítmicos:

$$y_t = \ln(1+R_t) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

No caso dos DIs futuros, não faz sentido calcular os retornos substituindo os PUs de ajuste na fórmula anterior:

$$Y_t = \frac{PU_t}{PU_{t-1}} - 1 ,$$

A expressão acima não é adequada para o cálculo do retorno deste contrato porque PU_t e PU_{t-1} são preços de objetos distintos. O PU_t é o preço de um contrato sobre as taxas de CDI entre t e o vencimento e PU_{t-1} o preço de um contrato sobre as taxas de juros esperadas entre $t-1$ e a data de vencimento. Para compatibilizar estes dois preços é preciso fazer com que eles se refiram a taxas de juros para o mesmo período. A forma de fazer isto é calcular o que a BM&F chama de PU ajustado através da aplicação da taxa de CDI ocorrida em $t-1$ sobre PU_{t-1} :

$$PU_{t-1}^A = (1 + i_{t-1})PU_{t-1}$$

O PU ajustado seria o PU que vigoraria em t caso as expectativas de taxas de juros do mercado em $t-1$, expressas em PU_{t-1} , para o período que se estende de t a data de vencimento do contrato se mantivessem inalteradas. O retorno de um contrato de DI seria dado, então, por:

$$Y_t = \frac{PU_t}{PU_{t-1}^A} - 1 \quad (43),$$

ou nos logaritmos:

$$y_t = \ln(1+R_t) = \ln(PU_t) - \ln(PU_{t-1}^A)$$

O retorno de um contrato de DI calculado desta forma pode ser interpretado como a variação ocorrida entre t e $t-1$ das expectativas do mercado sobre as taxas de CDI a vigorar até a data de seu vencimento. Claramente, se estas expectativas não se alteram, então $Y_t = y_t = 0$.

O problema de se trabalhar com séries de retornos calculadas desta forma é que, inevitavelmente, a sua volatilidade tem uma redução determinista com o tempo. Isto ocorre porque, a medida que o tempo passa, o conjunto de taxas CDI expressas no PU de um contrato, que vence numa determinada data, é cada vez menor. Assim, com a aproximação do vencimento do contrato o nível de desconhecimento do mercado em relação a taxa de juros para o período restante é menor. Com efeito, esta queda na volatilidade não está relacionada com nenhuma mudança no comportamento do mercado,

mas sim com a simples passagem do tempo. Os modelos econométricos, como o SV e GARCH, podem captar este efeito através da introdução de variáveis dummie que assumam o valor máximo no dia em que um determinado contrato de DI começa a ser negociado e caia linearmente até zero no seu vencimento.

Neste trabalho trabalha-se com as séries ajustes diários dos três primeiros vencimentos de futuros de DI, os de maior liquidez. Para efeito de cálculo de risco de posições nestes contratos, faz mais sentido trabalhar com as séries de ajustes diários, pois é o ajuste que define o ganho ou perda financeira efetiva da posição num determinado dia. No cálculo das volatilidades e correlações trabalha-se sempre com os retornos logarítmicos.

No entanto, na montagem de um sistema para administração de risco de carteiras genéricas é mais operacional construir uma série de PUs sintéticos que expresse a expectativa de taxa de CDI do mercado num período fixo de dias úteis. Esta abordagem se torna mais operacional porque ele torna possível a aplicação da estrutura de mapeamento de instrumentos de renda fixa descrita na seção 2.1.1. As taxas implícitas nestes PUs sintéticos serão pontos da estrutura a termo de taxa de juros de mercado. Os PUs sintéticos são calculados a partir dos PUs negociados em bolsa descontando 100.000 pela taxa acumulada no número de dias fixados. Estas taxas estão expressas nos contratos futuros padrões.

Por exemplo, suponha que o contrato que vence daqui a 10 dias úteis está sendo negociado a 98.600, o que implica uma taxa de CDI média anualizada³ de 42,66%, e que um contrato com vencimento em 30 dias úteis é negociado a 96.200 implicando uma taxa média de 36,41% para o período de 20 dias úteis entre o vencimento do contrato anterior

³ É convenção do mercado expressar a taxa de CDI mensalizada. A taxa de SELIC é anualizada por dias úteis para um ano de 252 dias úteis da seguinte forma:

$$j_a = ((1 + j)^{\frac{252}{n}} - 1)$$

onde, j é a taxa de juros para um período de n dias úteis e j_a a respectiva taxa anualizada.

e a data do seu próprio vencimento. Para construir um PU sintético de 20 dias úteis é preciso utilizar as informações destes dois contratos. Este sintético é igual a 100.000 descontado pelo acumulado de 10 dias da taxa média até o vencimento do primeiro contrato e 10 dias da taxa esperada para o período entre o vencimento do primeiro e segundo contratos da seguinte forma:

$$PU_{20} = \frac{100.000}{\frac{100.000}{98.600} \left(\frac{98.600}{96.200} \right)^{\frac{10}{20}}} = 97.392$$

Para calcular o retorno deste contrato sugere-se a utilização do mesmo princípio adotado no cálculo do ajuste de um contrato de DI padrão. O retorno entre t e $t-1$ é calculado, neste caso, comparando-se o PU_{20} em $t-1$ ajustado pelo CDI deste dia com um de 19 dias úteis calculado em t , PU_{19} . Em t calcula-se um PU de 19 dias úteis para que seu vencimento ocorra no mesmo dia do PU_{20} do dia anterior. Desta forma, estamos calculando, a cada dia, a variação das expectativas de taxas de CDI do mercado de um dia para outro. Não se pode comparar o PU_{20} ajustado em $t-1$ com o PU_{20} em t , pois estes PUs estariam refletindo expectativas de taxas para períodos distintos.

Construídos estes vértices, as posições com vencimentos em diferentes períodos podem ser mapeadas para eles através da aplicação do método de mapeamento de posições em renda fixa descrito no capítulo 2, seção 2.1.1. Neste trabalho, constrói-se somente vértices de 20 e 40 dias úteis, respectivamente, PU_{20} e PU_{40} . Estes vértices foram escolhidos porque para sua construção somente são necessários os PUs que tinham liquidez ao longo de um período mais extenso. A construção de vértices de maior maturidade exigiria o uso de PUs com liquidez num período bastante restrito.

Contrato futuro do Índice IBOVESPA

O IBOVESPA é um índice de preço das ações negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo. O peso de cada ação no índice é dado pela sua participação relativa no volume

total negociado na bolsa. A carteira teórica do IBOVESPA é redefinida quadrimestralmente.

O IBOVEPA futuro é um contrato negociado na BM&F sobre o valor futuro do índice a vista. Os contratos tem vencimento em meses pares na quarta-feira mais próxima do dia 15, caso não tenha pregão neste dia, o vencimento se dá no dia útil subsequente. Atualmente, somente o contrato com vencimento mais curto apresenta liquidez. O contrato de segundo vencimento passa a ter liquidez apenas nas proximidades do vencimento do 1o contrato. Atualmente, o valor de cada ponto do índice é R\$ 3,00.

Nos contratos de IBOVESPA futuro também é utilizado o sistema de ajustes diários. As posições em aberto no final de cada pregão serão ajustadas com base no preço de ajuste do dia, determinado pela média ponderada das cotações dos negócios realizados nos últimos 30 minutos de pregão, conforme regras da Bolsa, com movimentação financeira em D+1.

Neste trabalho utilizamos as séries de retornos logarítmicos do contrato mais líquido. No dia seguinte ao vencimento do contrato, toma-se o cuidado de calcular o retorno do novo contrato com relação ao seu valor no dia anterior e não em relação ao contrato mais líquido. Este encaixamento é feito para evitar saltos nos retornos.

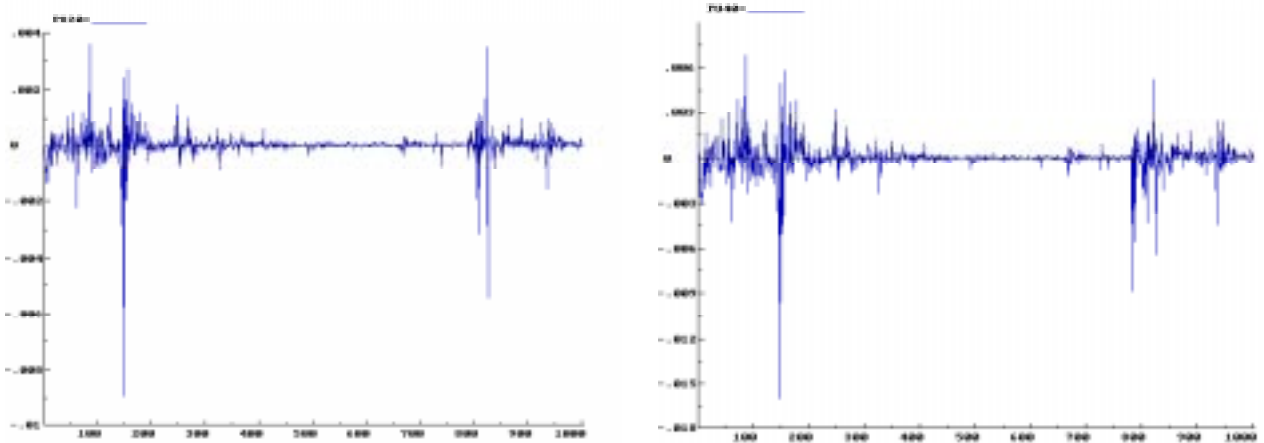
O último ativo com o qual trabalha-se aqui é a Telebrás PN, a ação mais negociada na Bolsa de Valores de São Paulo. Mais recentemente, com a privatização da empresa, a ação foi *spritada* nas ações das diversas empresas que compunham o sistema Telebrás. Paralelamente, foi criado o recibo de Telebrás uma ação sobre a empresa antiga, agora sem mais nenhum ativo. Os detentores da ação de Telebrás puderam optar entre ficar com uma cesta de ações das empresas que formavam o sistema ou ficar com o recibo. Curiosamente, ainda hoje, os recibos de Telebrás, ações de uma empresa sem ativos, são os papéis mais negociados na BOVESPA. A série histórica utilizada neste trabalho é anterior à introdução dos recibos.

Na série de Telebrás não se faz necessária a realização de nenhum ajuste. Utiliza-se diretamente o retorno logarítmico dos preços de fechamento da ação.

4.2- Análise descritiva dos Dados

4.2.1- Vértices fixos da curva de juros

Nesta seção apresenta-se as principais características dos retornos dos vértices de 20 e 40 dias úteis construídos da forma descrita na seção anterior. As séries históricas se estendem de 02 de agosto de 1994 a 18 de agosto de 1998 totalizando 1000 observações.

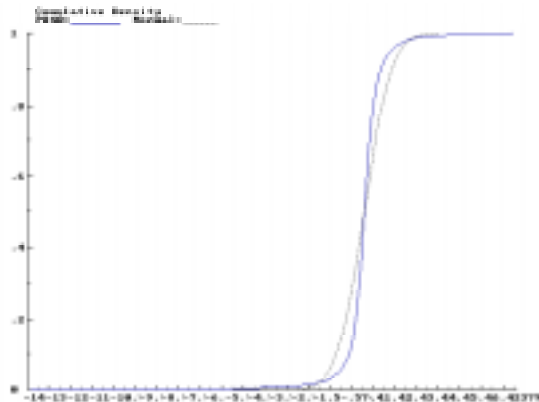
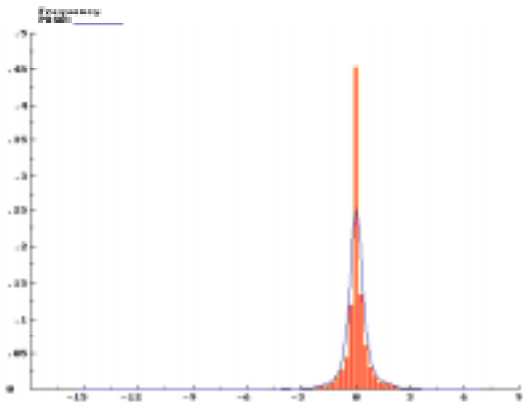
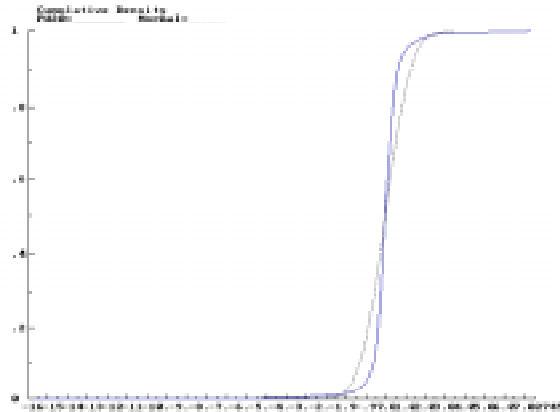
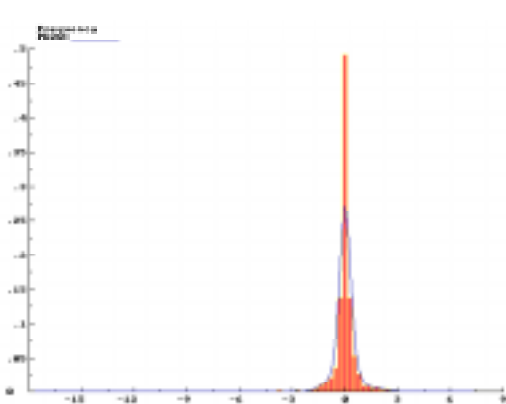


Como se nota nos gráficos acima, os retornos dos dois vértices apresentam comportamentos bastante semelhantes. Um período de alta volatilidade no início da série com um grande *outlier* no início de março de 1995, efeitos produzidos pela crise mexicana. No final de 1997, tem-se outro período com um agrupamento de volatilidade desta vez provocado pela crise asiática, quando o Banco Central brasileiro realizou um forte aperto monetário para conter um ataque especulativo contra o Real.

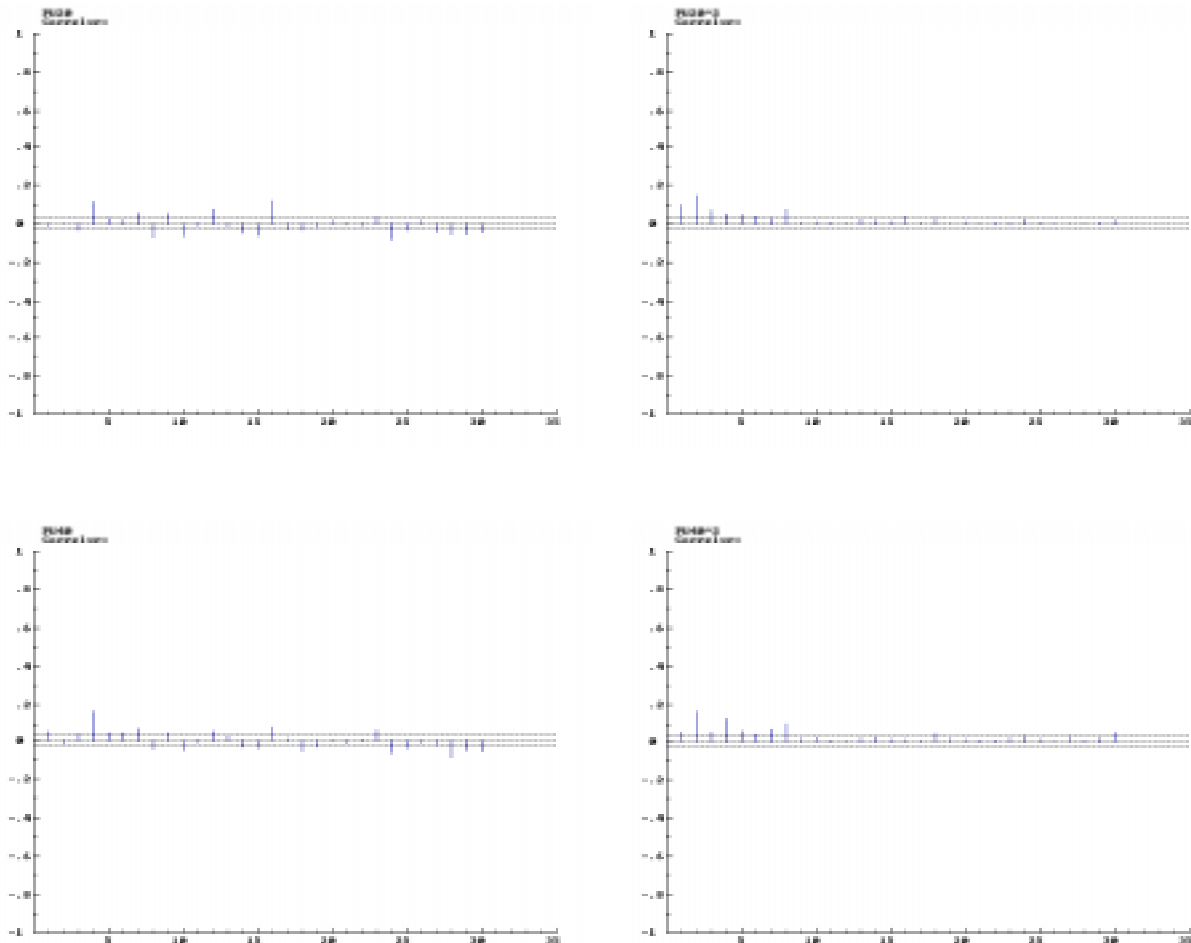
Estes retornos apresentam média muito próximo de zero. As estatísticas de assimetria e curtose apontam para um distanciamento da hipótese de normalidade. Estas suspeitas são confirmadas pelos testes formais de normalidade apresentados na tabela abaixo. Em ambos os casos rejeita-se a hipótese nula de que a distribuição dos retornos é normal. No dois casos, os testes indicam presença de excesso de curtose em relação a normal e

também a existência de assimetria na distribuição, resultados em linha com os fatos estilizados apresentados na seção 3.1 deste trabalho.

<u>Estatísticas</u>	<u>PU20</u>	<u>PU40</u>
Média	0,0000040	0,0000040
Desvio Padrão	0,0005200	0,0010690
Assimetria	-5,9646770	-3,9608600
Excesso de curtose	106,1979180	61,3516140
Mínimo	-0,0089290	-0,0159880
Máximo	0,0035610	0,0068590
<u>Testes (p-value)</u>	<u>PU20</u>	<u>PU40</u>
Assimetria	0,0000	0,0000
Excesso de curtosi	0,0000	0,0000
Normalidade Bowman-Shenton	0,0000	0,0000
Normalidade Doornik-Hansen	0,0000	0,0000



Os gráficos da distribuição empírica dos retornos mostram a concentração dos dados em torno da média zero. Os gráficos da distribuição acumulada evidenciam a discrepância em relação a distribuição normal, na distribuição dos retornos observações extremas são mais prováveis do que o que está implícito na distribuição normal, o efeito de caudas pesadas comum em séries financeiras.

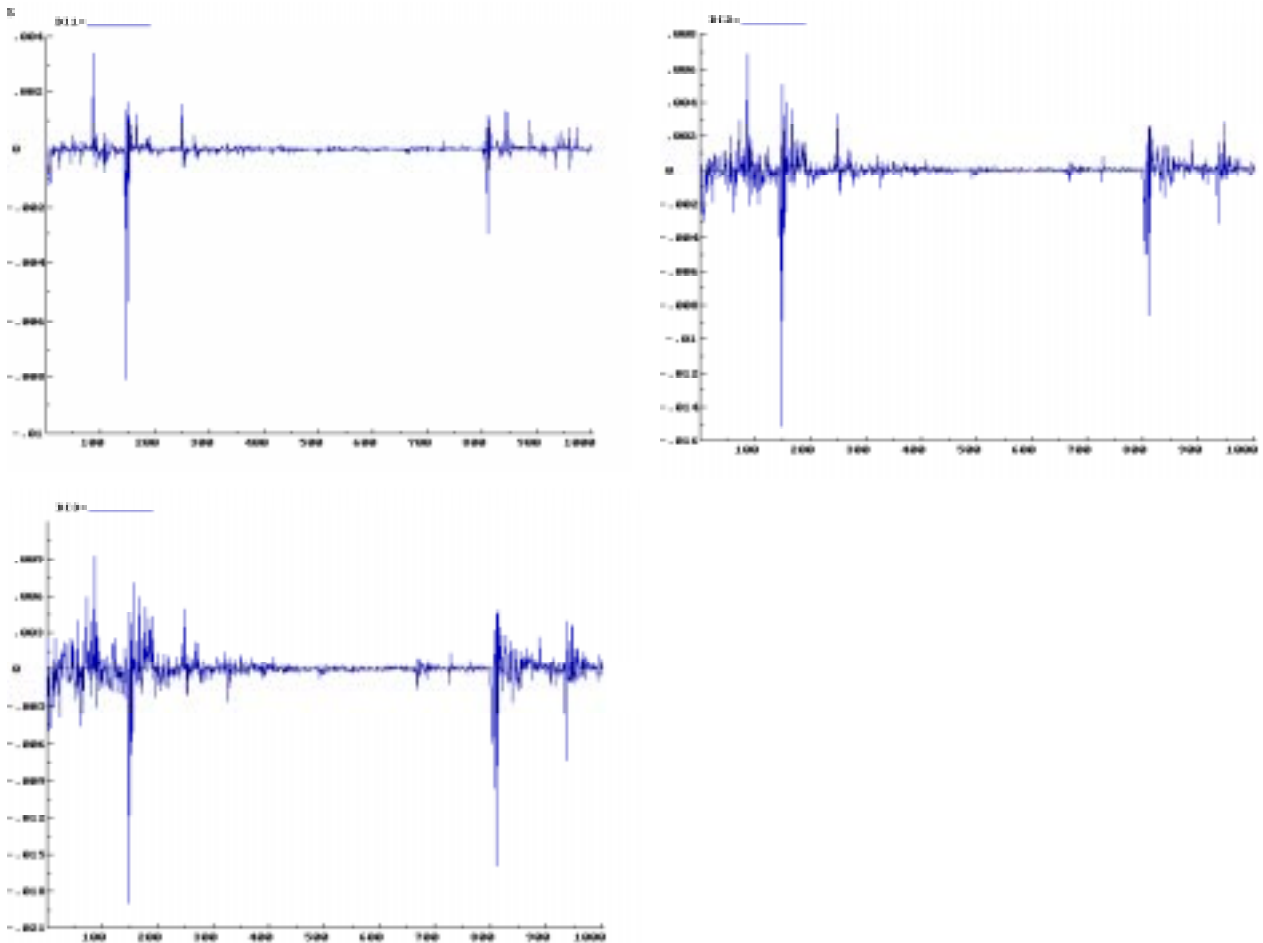


Os correlogramas dos retornos não sugerem existência de autocorrelação serial, a extrapolação do intervalo de confiança observada em algumas defasagens isoladas pode ser explicada pela presença de alguns *outliers* na série. Por outro lado, o correlograma do quadrado dos retornos apresenta uma concentração de picos nas primeiras defasagens,

fato que indica presença de autocorrelação serial nestas séries. Este último fato explica os agrupamentos de volatilidades das séries dos retornos o que justifica a modelagem dos segundos momentos condicionais dos retornos como um processo autoregressivo como nos modelos GARCH e SV.

4.2.2- Série de ajustes diários do DI's futuros

Nesta seção realiza-se a descrição estatística das séries dos ajustes diários dos três primeiros vencimentos de DI futuro. As séries são construídas fazendo-se um



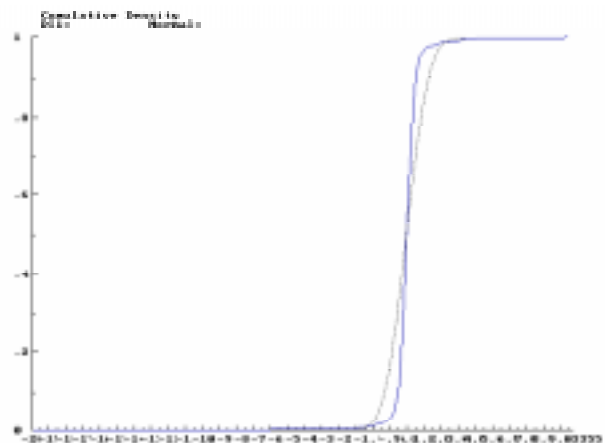
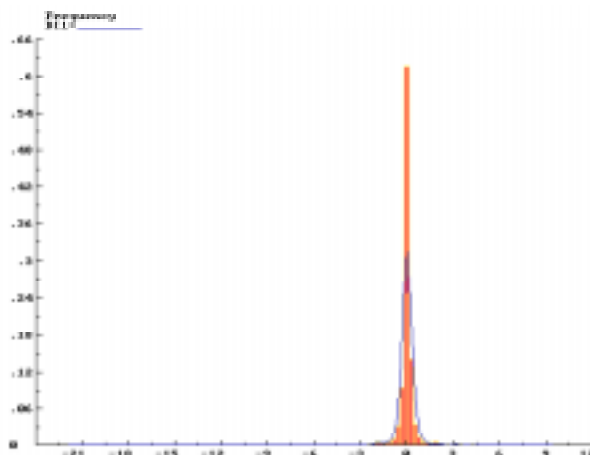
encaixamento no vencimento de cada contrato, como descrito anteriormente. O período amostral é o mesmo das séries dos vértices fixos, de 02 de agosto de 1994 a 18 de agosto de 1998 totalizando 1000 observações.

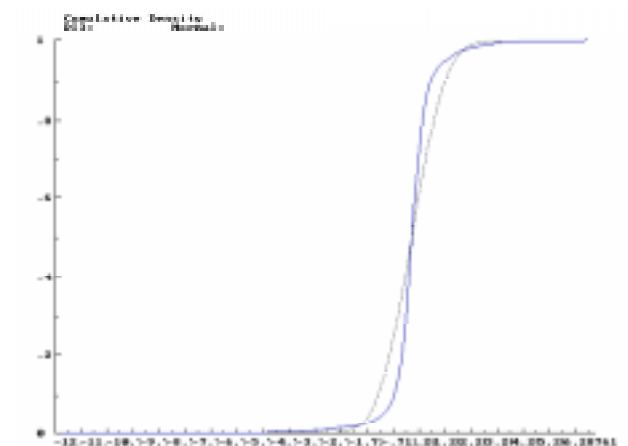
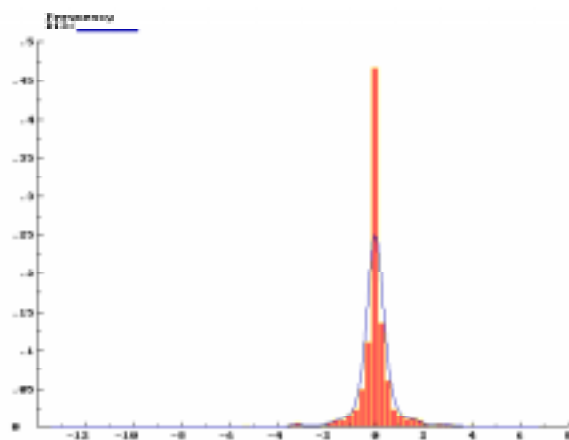
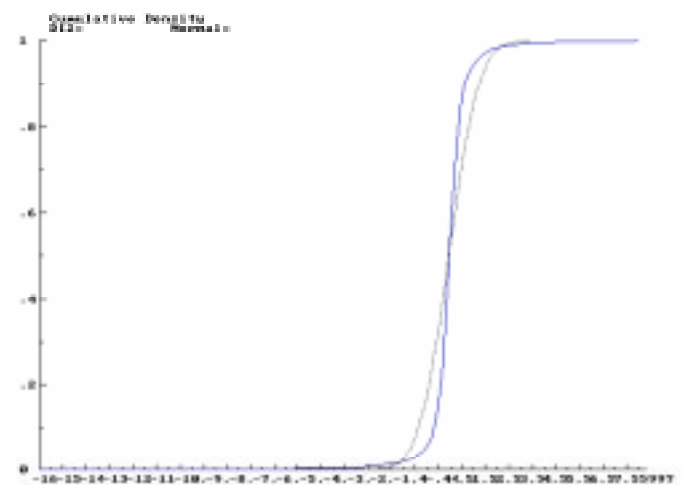
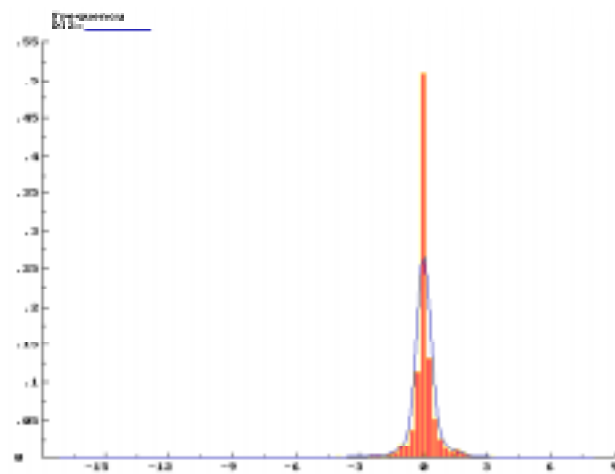
O comportamento destas séries é muito semelhante ao apresentado pelas séries de vértices fixos de 20 e 40 dias úteis. Nota-se dois períodos de aglomerações de

volatilidade, um no início de 1995 nas proximidades da crise mexicana e outro no final de 1997 resultado da crise asiática. Nestes períodos tem-se dois grandes *outliers* provocados por mudanças na política monetária realizadas pelo Banco Central. Uma característica a se destacar nestas séries é que o padrão da volatilidade é os mesmos para os três vencimentos. No entanto, nota-se, visualmente, que o nível da volatilidade cresce com os vencimentos.

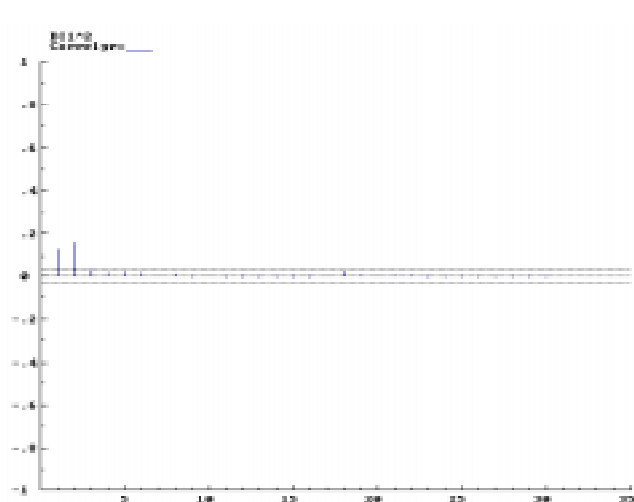
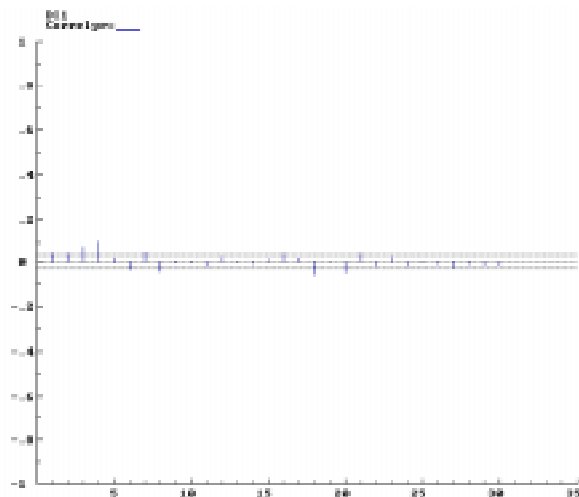
Nas três séries a média amostral é próxima de zero e o desvio padrão amostral cresce com os vencimentos, como sugere os gráficos anteriores. As estatísticas de assimetria e curtose sugerem distanciamento da hipótese de normalidade. Os testes de normalidade apresentados na tabela abaixo confirmam esta indicação, a hipóteses de normalidade é rejeitada nos três casos. Os testes mostram a existência de excesso de curtose e assimetria nas séries, fato em linha com os fatos estilizados apresentados na seção 3.1.

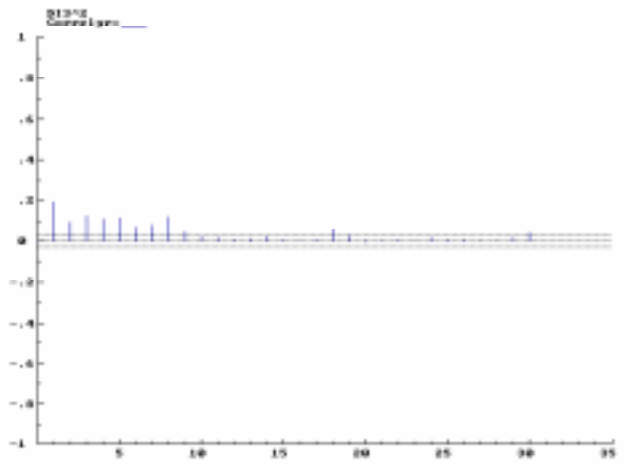
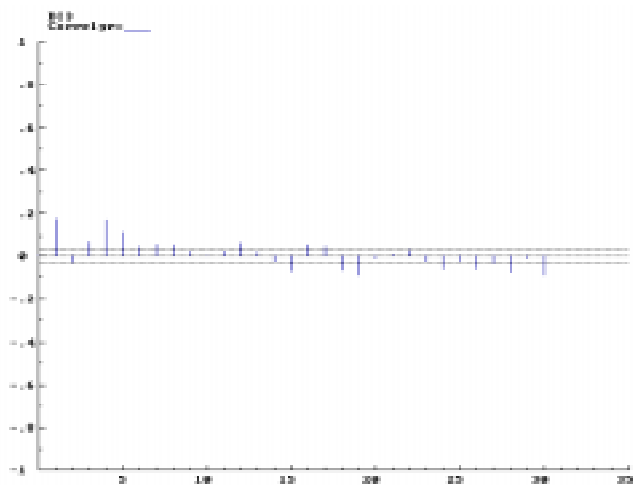
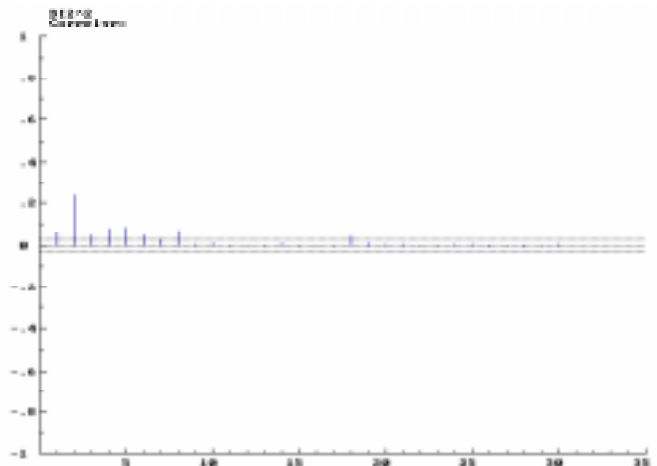
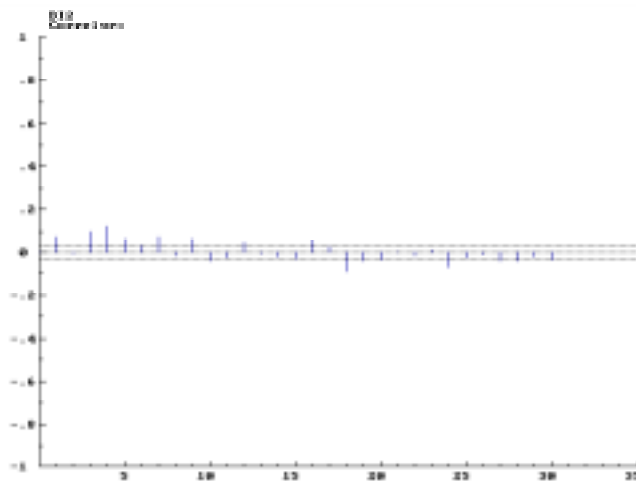
Estatísticas	DI1	DI2	DI3
Média	-0,0000010	0,0000010	0,0000140
Desvio Padrão	0,0000378	0,0009030	0,0014680
Assimetria	-10,0818580	-5,4463820	-3,4906360
Excesso de curtose	225,4712540	94,1455080	47,1908290
Mínimo	-0,0081050	-0,0151120	-0,0189660
Máximo	0,0033960	0,0068590	0,0092550
Testes (p-value)	DI1	DI2	DI3
Assimetria	0,0000	0,0000	0,0000
Excesso de curtosi	0,0000	0,0000	0,0000
Normalidade Bowman-Shenton	0,0000	0,0000	0,0000
Normalidade Doornik-Hansen	0,0000	0,0000	0,0000





O gráfico da distribuição empírica dos retornos mostra a concentração dos dados em torno de zero nas três séries e existência de excesso de curtose. Esta última característica é mais evidente nos gráficos da distribuição acumulada dos retornos, onde nota-se que a probabilidade de ocorrência de eventos extremos nas séries em questão é maior do que numa distribuição normal, este é o chamado efeito caudas pesadas.

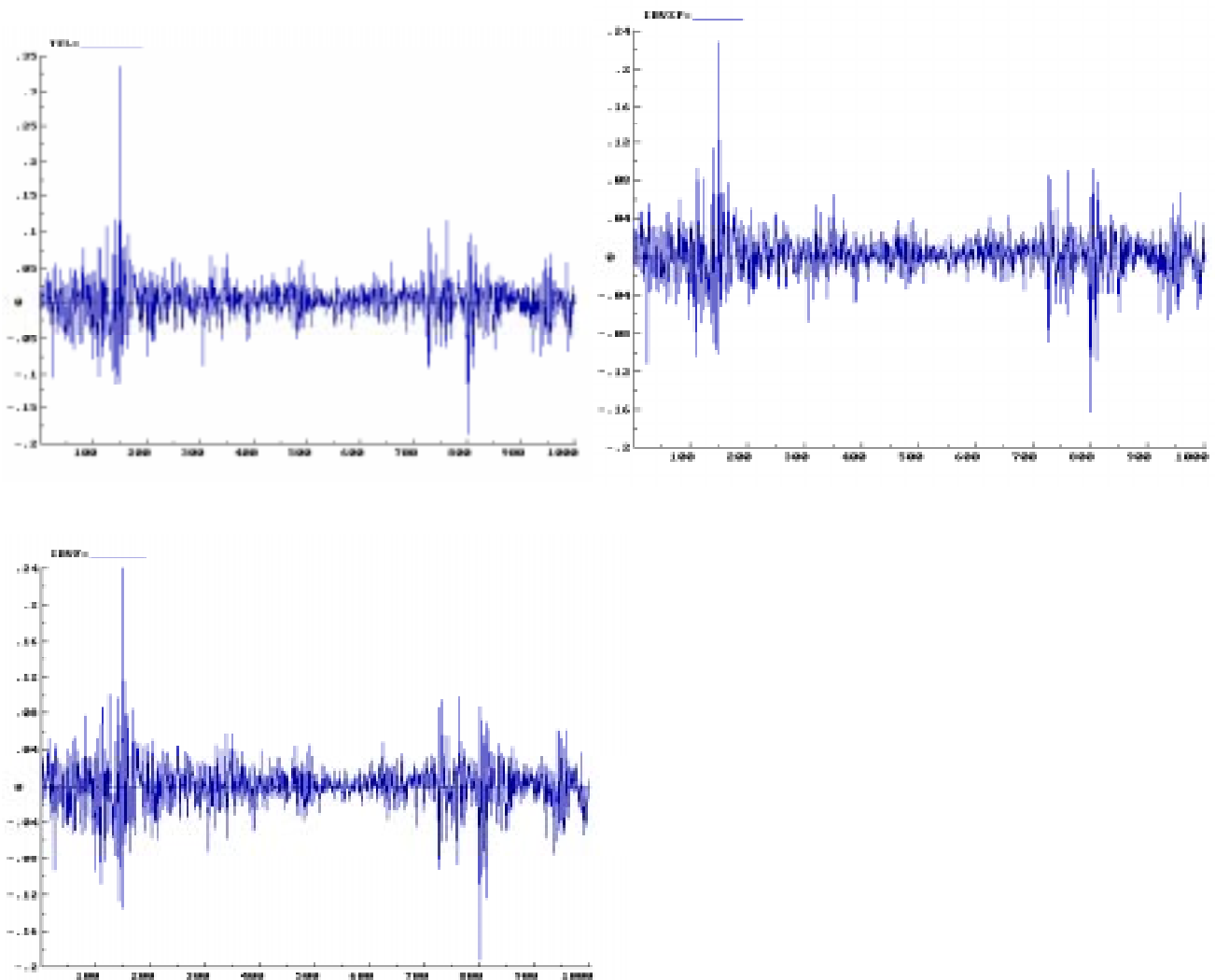




Nas séries dos três vencimentos o correlograma dos quadrados dos retornos (gráfico a direita) apresentam picos concentrados na primeiras defasagens sugerindo existência de uma estrutura autoregressiva nos segundos momentos condicionais dos retornos. Este efeito deve ser a causa da presença de agrupamentos de volatilidades nestas séries. Os correlogramas dos retornos apontam para a ausência de autocorrelação serial, a existência de alguns picos, como dito anteriormente, deve estar ligada a presença de grandes *outliers* nestas séries.

4.2.3- Séries dos ativos ligados ao mercado de ações

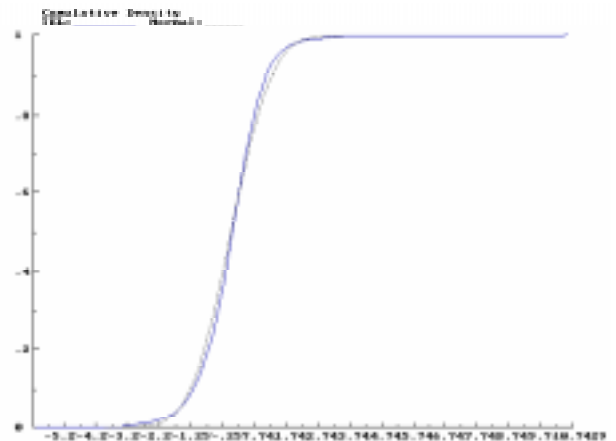
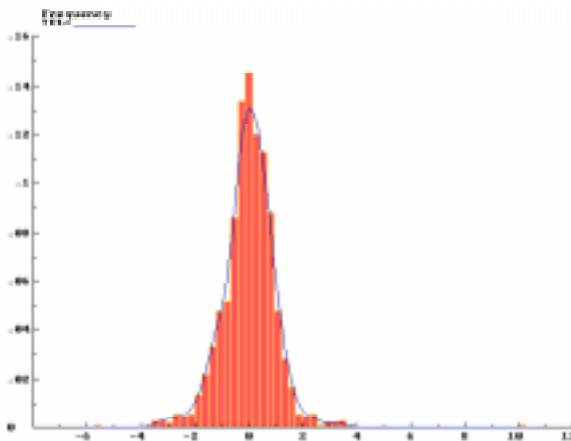
As séries ligada ao mercado acionário estudadas são o preços de fechamento da ação Telebrás PN, ação mais negociada na Bolsa de Valores de São Paulo, o índice IBOVESPA a vista e o IBOVESPA futuro. A série de Telebrás é ajustada por dividendos e no IBOVESPA futuro é realizado um encaixamento no vencimento dos contratos. O período analisado é o mesmo das séries anteriores, de 02 de agosto de 1994 a 18 de agosto de 1998 totalizando 1000 observações.

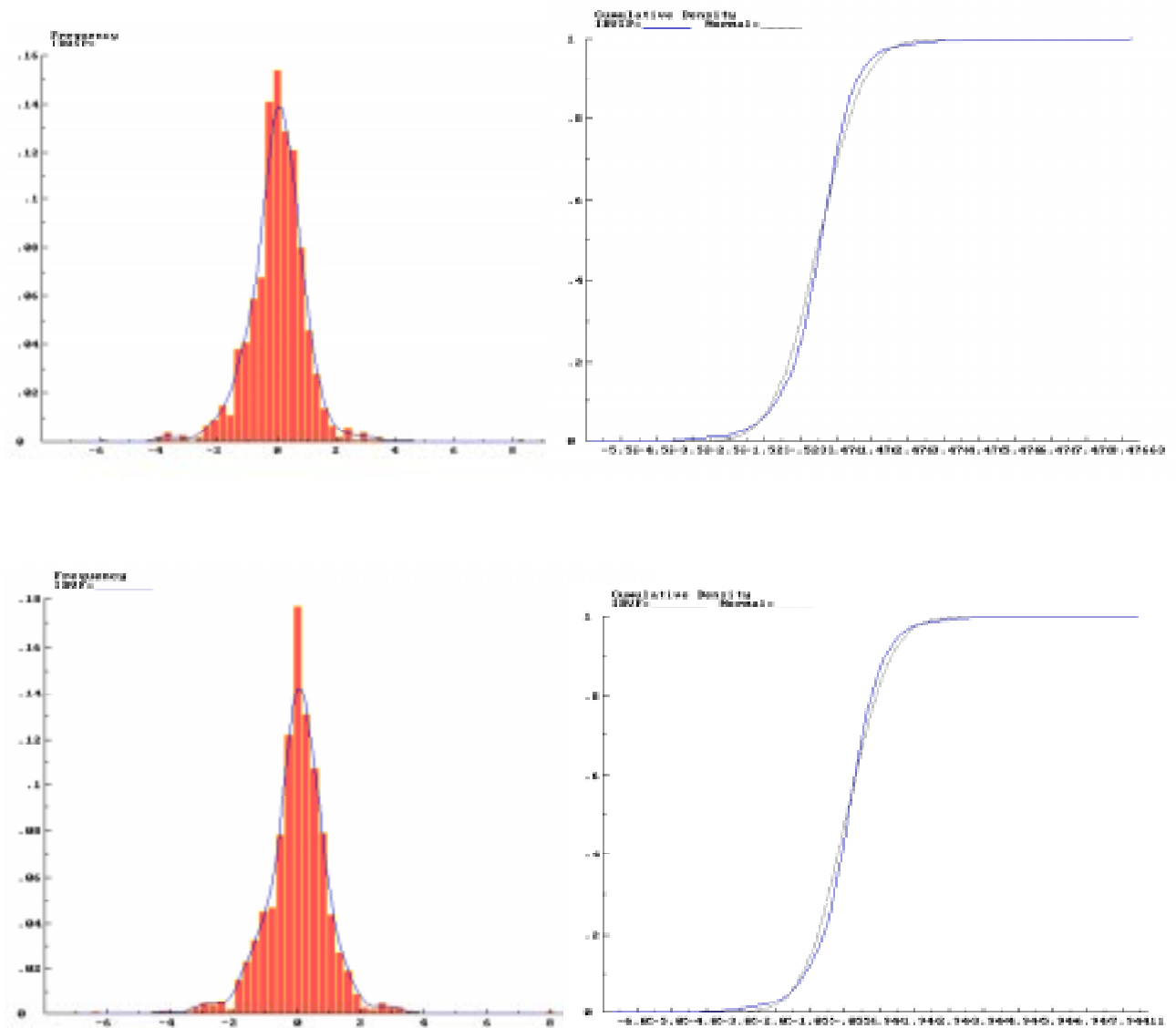


A volatilidade destas séries é muito maior que as séries anteriores, que eram ligadas ao mercado de juros. O desvio padrão amostral dos retornos de Telebrás, por exemplo, é quase 40 vezes maior que o desvio padrão dos retornos do DI de segundo vencimento. Contudo, as propriedades das séries são semelhantes. Nota-se que os agrupamentos de maior volatilidade ocorrem no mesmo período que no mercado de juros, no início de 1995 nas proximidades da crise mexicana e no fim de 1997 ao redor da crise asiática.

A média dos retornos é maior para estes ativos, mas também aqui a hipótese de média zero não parece muito longe da realidade. As estatísticas indicam que a distribuição destas séries é assimétrica e tem excesso de curtose em relação à distribuição normal. Os testes formais rejeitam a hipótese nula de que as séries são normalmente distribuídas aceitando a hipóteses de assimetria e excesso de curtose para todas as três séries.

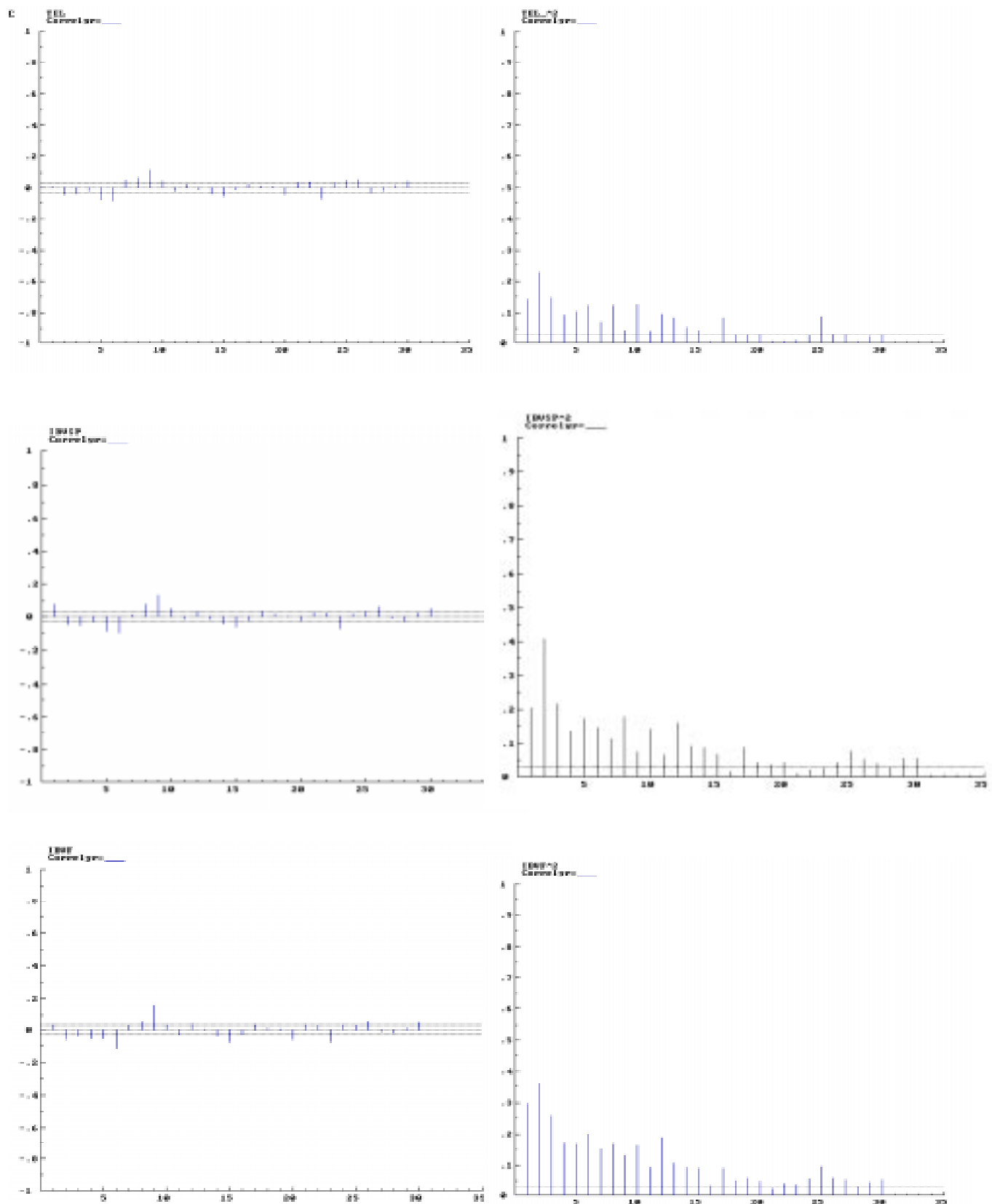
Estatísticas	Tel	IBVSP	IBVF
Média	0,0010090	0,0007330	-0,0002400
Desvio Padrão	0,0329640	0,0274640	0,0303116
Assimetria	0,6705680	0,1109620	-0,0891650
Excesso de curtose	11,9893350	7,6723330	6,9201960
Mínimo	-0,1858920	-0,1622390	-0,1919630
Máximo	0,3345970	0,2281260	0,2393190
Testes (p-value)	Tel	IBVSP	IBVF
Assimetria	0,0000	0,0000	0,0000
Excesso de curtosi	0,0000	0,0000	0,0000
Normalidade Bowman-Shenton	0,0000	0,0000	0,0000
Normalidade Doornik-Hansen	0,0000	0,0000	0,0000





O gráfico da distribuição empírica dos retornos das séries mostra que, visualmente, a hipótese de média zero é plausível. O gráfico da distribuição acumulada dos retornos mostra que a probabilidade de ocorrência de retornos extremos é maior que no caso de uma distribuição normal nas três séries, indicando a existência do efeito caudas pesadas.

Para estas séries existe uma distinção mais nítida entre o comportamento dos correlogramas dos retornos e do quadrado destes. O correlograma dos retornos aponta para uma aleatoriedade das séries com alguns picos isolados. O efeito dos *outliers* é menor nestas séries porque, em geral, eles não são muitas vezes maiores que os retornos padrões, como no caso das séries de juros. Por outro lado, o correlograma do quadrado



dos retornos indica a presença de forte autocorrelação serial nas primeiras defasagens. Como nas séries anteriores, isto sugere que o segundo momento condicional destas séries seja modelado segundo uma estrutura autorregressiva como nos modelos SV e GARCH.

4.3- Métodos para Avaliação dos Modelos

Na literatura econométrica existe uma grande variedade de trabalhos que procuram avaliar a precisão de modelos que fazem previsões pontuais sobre uma determinada variável. Estes tem o objetivo de prever o valor da variável alvo num ponto do tempo. Em geral, a acurácia destas previsões é avaliada a partir de alguma medida de distância entre o valores estimados e realizados da variável. Assim, quanto menor esta distância mais preciso é a previsão do modelo.

Contudo, ainda é muito restrito o número de métodos para avaliação de previsões de intervalos para uma variável. Uma previsão de um intervalo significa encontrar um certo subconjunto do espaço onde a variável toma valores associado a uma probabilidade de ocorrência. O VAR de um portfólio tem esta característica, pois ele nada mais é do que o limite de um intervalo de confiança que informa que perdas acima do VAR somente ocorrem com uma probabilidade $1-p$, sendo p o nível de confiança. A dificuldade de avaliar este tipo de previsão advém do fato de que a variável alvo não é observada no futuro e, portanto, não é possível nenhum tipo de comparação direta entre os valores realizados e previstos.

Nesta seção apresenta-se 4 métodos para avaliação de previsões de intervalos de confiança que podem ser utilizados para avaliação do desempenho de estimativas de VAR. Os três primeiros, respectivamente, em Kupiec (1995), Christoffersen (1997) e Crnkovic & Drachman (1996) se baseiam em critérios estatísticos. Enquanto o último apresentado em Lopez (1997) adota como critério de performance a minimização de uma certa função perda.

4.3.1- Kupiec

Por definição, o VAR de um portfólio depende do nível de significância escolhido. Dado um nível de significância $1-p$ a frequência esperada para a ocorrência de retornos acima do VAR é igual a p . Por exemplo, para um portfólio arbitrário um VAR de R\$ 10.000

calculado ao nível de significância de 5% significa que perdas maiores que R\$ 10.000 só devem ocorrer 5% das vezes. Numa amostra finita, no entanto, mesmo que a hipótese sobre a distribuição dos retornos esteja correta, a frequência observada de valores acima do VAR terá uma variabilidade que fará com que ela divirja do valor esperado p . A questão é saber se esta divergência é consistente com o nível de confiança utilizado no cálculo do VAR.

Kupiec (1995) propõe um teste estatístico baseado na frequência de extrapolação do VAR numa amostra para um dado portfólio. Sendo T o tamanho da amostra e N o número de vezes em que o retorno do portfólio excede o VAR calculado a um nível de confiança $1-p^*$, esta frequência é igual a N/T . O que se pretende testar é se N/T é significativamente diferente de p^* .

Nota-se que a comparação da perda ou ganho de um portfólio num determinado dia com a estimativa do VAR a certo nível de significância p determina o resultado de um evento binomial. Neste caso, tem-se um erro quando a perda da carteira é maior que a perda potencial dada pelo VAR e um acerto quando ela é menor. Desta forma, supondo independência dos eventos entre dias, a probabilidade E de haver N erros (retornos acima do VAR) numa amostra T é dada por uma distribuição binomial com parâmetros N, p sendo p a probabilidade do erro:

$$E = (1-p)^{T-N} \cdot p^N \quad (44)$$

O autor sugere um teste de razão de verossimilhança para testar a hipótese nula $p=p^*$. O lema de Neyman-Pearson estabelece que, neste contexto, o teste RV é uniformemente mais poderoso contra hipóteses alternativas simples. A estatística do teste é dada por:

$$RV = -2 \ln [(1-p^*)^{T-N} \cdot p^{*N}] + 2 \ln [(1-N/T)^{T-N} \cdot (N/T)^N] \quad (45)$$

Sob a hipótese nula, RV tem distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

O problema deste teste, como apontado por Kupiec, é seu baixo poder para amostras pequenas, ou seja, este teste tem uma alta probabilidade de aceitar a hipótese nula quando ela é falsa em amostras com número de observações limitado. Por exemplo, para uma

amostra de 1000 dias a hipótese nula $p^* = 5\%$ é aceita se a frequência de erro observada estiver entre 3,7% e 6,5%.

No mesmo artigo o autor sugere um outro teste, o do tempo até a primeira falha. Este teste se apoia na idéia de quanto mais cedo ocorrer a primeira falha mais alta é a verdadeira probabilidade de falha. Este teste é aplicado cada vez que ocorre um retorno fora do intervalo estimado pelo VAR. Sendo p a verdadeira probabilidade de falha e $\tilde{T}$ uma variável aleatória que informa o número de dias antes da primeira falha, a probabilidade P de ocorrência da primeira falha ocorrer em V dias é governada por uma distribuição geométrica com parâmetros p , V :

$$P(\tilde{T} = V) = p \cdot (1 - p)^{V-1} \quad (46)$$

Dado uma realização de $\tilde{T}$, o autor sugere, novamente, um teste de razão de verossimilhança (RV) para testar a hipótese nula $p = p^*$. Novamente, o teste RV é uniformemente mais poderoso contra hipóteses alternativas simples. A estatística deste teste é dada por:

$$RV(\tilde{T}, p^*) = -2 \ln [p \cdot (1 - p)^{\tilde{T}-1} + 2 \ln[(1/\tilde{T}) \cdot (1 - 1/\tilde{T})^{\tilde{T}-1}] \quad (47)$$

Sob a hipótese nula, RV tem distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

Dada mesma forma que o teste anterior, o teste do tempo até a primeira falha tem um baixo poder. Isto significa que a região de aceitação da hipótese nula é muito grande. Por exemplo, para a hipótese nula de $p^* = 5\%$ aceita-se a nula se $2 < V < 72$. Esta característica do teste torna-o pouco útil para avaliar a precisão de sistemas de riscos, pois é preciso uma grande discrepância entre a probabilidade esperada e a observada para que ocorra uma rejeição do modelo.

4.3.2- Christoffersen

O procedimento sugerido por Kupiec para medir a precisão do VAR é não condicional, ou seja, é baseado na informação contida em toda amostra. O teste não condicional não tem potência contra a alternativa de que as exceções do VAR estimado se agrupam de forma dependente do tempo. Um método condicional tem a propriedade de levar em conta as informações existentes em cada ponto da amostra, ele é condicional ao conjunto de informações disponível em cada instante de tempo. Como as séries financeiras, em geral, apresentam volatilidades dependentes no tempo, implicando uma dependência temporal no VAR, a avaliação condicional dos modelos de risco se torna importante.

Em Christoffersen (1996) é definido um procedimento para a verificação da precisão das previsões para intervalos de confiança que tenta capturar a condicionalidade das estimativas. O teste é diretamente direcionado para o caso de estimadores para VAR de uma carteira.

Seja $\{y_t\}_{t=1}^T$ a seqüência observada da variável aleatória y_t , o retorno monetário de um ativo ou carteira de ativos. Em cada instante do tempo o intervalo estimado com base na amostra é dado é $\{(-\infty, VAR_{t|t-1}(1-p))\}_{t=1}^T$ onde $VAR_{t|t-1}(1-p)$ é o VAR estimado para o período t ao nível de confiança p com as informações disponíveis até $t-1$. Define-se a seguinte variável indicador I_t :

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{se } y_t \in (-\infty, VAR_{t|t-1}(1-p)) \\ 0, & \text{se } y_t \notin (-\infty, VAR_{t|t-1}(1-p)) \end{cases}$$

Diz-se que uma seqüência de intervalos projetados é eficiente com relação ao conjunto de informação Ψ_{t-1} se $E[I_t | \Psi_{t-1}] = p$, para todo t .

O autor define então um critério operacional demonstrando que testar a eficiência do intervalo projetado é equivalente a testar a hipótese de que a seqüência $\{I_t\}$ é independente e identicamente distribuída segundo uma Bernoulli com parâmetro p . Diz-

se então que a seqüência de intervalos $\left\{ \left(L_{t|t-1}(p), U_{t|t-1}(p) \right) \right\}_{t=1}^T$ tem uma correta cobertura condicional se $\{I_t\} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Bernoulli}(p), \forall t$.

Para testar esta hipótese sugere-se dois testes de razão de verossimilhança (RV). O primeiro testa exclusivamente a adequação não condicional das estimativas. O segundo testa a independência da seqüência $\{I_t\}_{t=1}^T$.

No teste de adequação não condicional a hipótese nula de que $E[I_t] = p$ é testada contra a alternativa $E[I_t] \neq p$. Sobre a nula a verossimilhança é igual a:

$$L(p; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1-p)^{T-N} \cdot p^N \quad (48)$$

onde N é o número de observações para as quais $I_t = 1$.

Sobre a alternativa a verossimilhança é igual a:

$L(\pi; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1-\pi)^{T-N} \cdot \pi^N$, onde N é o número de observações para as quais $I_t = 1$.

A estatística do teste de razão de verossimilhança (RV_{nc}) neste caso é igual a:

$$RV_{nc} = -2 \ln [L(p; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\pi}; I_1, I_2, \dots, I_T)] \stackrel{a.s.}{\sim} \chi^2(1) \quad (49)$$

onde $\hat{\pi} = N/T$ é o estimador de máxima verossimilhança de π .

No teste de independência a hipótese nula é independência e a alternativa é um processo Markoviano de primeira ordem. Considere uma cadeia de Markov binária de primeira ordem com a seguinte matriz de transição de probabilidade:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix}$$

onde $\pi_{ij} = \Pr(I_t = j | I_{t-1} = i)$. A função de verossimilhança aproximada deste processo é dada por:

$$L(\Pi_1; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} \pi_{11}^{n_{11}}$$

onde n_{ij} é o número de observações com o valor i seguido pelo valor j . Maximizando a log-verossimilhança e resolvendo para os parâmetros obtém-se:

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}} & \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} \\ \frac{n_{10}}{n_{10} + n_{11}} & \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} \end{bmatrix}$$

Para seqüência $\{I_t\}_{t=1}^T$ calculada a partir dos intervalos estimados é possível estimar um processo markoviano de primeira ordem e testar se a seqüência é independente notando que:

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_2 & \pi_2 \\ 1 - \pi_2 & \pi_2 \end{bmatrix}$$

corresponde a independência. A verossimilhança sobre a nula se torna:

$$L(\Pi_2; I_1, I_2, \dots, I_T) = (1 - \pi_2)^{(n_{00} + n_{10})} \pi_2^{(n_{01} + n_{11})}$$

sendo a estimativa de máxima verossimilhança dada por:

$$\hat{\pi}_2 = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11}}$$

Finalmente, a estatística do teste de razão de verossimilhança de independência (RV_{ind}) é expressa por:

$$RV_{ind} = -2\ln[L(\hat{\Pi}_2; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T)] \stackrel{a.}{\sim} \chi^2(1) \quad (50),$$

Note que o teste não depende da verdadeira probabilidade erro 1-p. Desta forma, está se testando exclusivamente a hipótese de independência. No entanto, o objetivo final é testar conjuntamente independência e a verdadeira probabilidade de erro 1-p. Para tanto o autor sugere uma combinação dos dois testes anteriores. O teste conjunto consiste em testar a

hipótese nula do teste não condicional contra a alternativa do teste de independência. Christoffersen prova que a estatística do teste de razão de verossimilhança neste caso é dada por:

$$RV_{\text{conjunto}} = -2\ln[L(p; I_1, I_2, \dots, I_T) / L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_T)] \stackrel{a.s.}{\sim} \chi^2(2) \quad (51)$$

que é igual a soma das estatísticas dos dois testes anteriormente apresentados, isto é:

$$RV_{\text{conjunto}} = RV_{\text{nc}} + RV_{\text{ind}} \quad (52)$$

4.3.3- Chrkovic e Drachman

Em Chrkovic e Drachman (1996) é proposto um procedimento para avaliar modelos de VAR baseado na distribuição de probabilidades estimada derivada deles em cada momento do tempo f_{mt} . O procedimento é baseado nos quantis observados, que são quantis sob $\{f_{tm}\}_{t=1}^T$ nos quais os retornos observados, efetivamente, se localizam. Dado f_{mt} e um retorno observado r_t , o quantil correspondente é dado por:

$$q_{mt}(r_t) = \int_{-\infty}^{r_t} f_{mt}(x) dx \quad (53)$$

Os autores propõe avaliar o modelo VAR testando se os quantis observados derivados da distribuição do modelo tem as propriedades dos quantis que seriam derivados de projeções precisas da distribuição. As propriedades que eles se referem estão ligadas ao fato que os quantis de sorteios aleatórios de uma distribuição são uniformemente distribuídos no intervalo 0 e 1. Desta forma, um teste da precisão do VAR pode ser feito testando se $\{q_{tm}\}_{t=1}^T$ são independentes e uniformemente distribuídos.

Os autores sugerem testar esta duas hipóteses separadamente. Para o teste da independência dos quantis é sugerido o uso da estatística BDS. O teste da distribuição uniforme é baseado na estatística de Kupier que mede os desvios entre duas funções de distribuição acumuladas. Seja $D_m(x)$ a função de distribuição acumulada dos quantis observados, a estatística de Kupier para o desvio de $D_m(x)$ de uma distribuição uniforme é dada por:

$$K_m = H[D_m(x), x] = \max_{0 \leq x \leq 1} (D_m(x) - x) + \max_{0 \leq x \leq 1} (x - D_m(x)) \quad (54)$$

a distribuição assintótica de K_m é expressa por:

$$\text{Prob}(K > K_m) = G\left(\left[\sqrt{T} + 0,155 + \frac{0,24}{\sqrt{T}}\right]v_m\right)$$

onde,

$$G(\lambda) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (4j^{2\lambda} - 1) e^{-2j^2\lambda^2} e^{-\max_{0 \leq x \leq 1} |D_m(x) - x|}$$

Os autores alertam que os resultados do procedimento se deterioram rapidamente para amostras menores que 500 observações.

4.3.4- Lopez

Em Lopez (1997) é apresentado um procedimento para avaliar modelos de risco que não se baseia em nenhuma estatística de teste como nas três metodologias apresentadas acima. A idéia é definir uma função perda que incorpore os critérios julgados importantes pelos reguladores. O melhor modelo, então, seria aquele que minimizasse esta função.

No presente trabalho optou-se pela utilização de uma função perda sugerida em Lopez (1998). A função perda sugerida para um modelo m qualquer tem a seguinte forma:

$$C_m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T C_{m,t} \quad (54)$$

onde,

$$C_{mt} = \begin{cases} 1 + (P_t - VAR_{mt})^2, & \text{se } y_t < VAR_{mt} \\ 0, & \text{se } y_t \geq VAR_{mt} \end{cases} \quad (55)$$

sendo VAR_{mt} o VAR estimado pelo modelo m para o período t e P_t a variação monetária no valor de mercado da carteira efetivamente observado em t . Esta função é semelhante à medida de erro quadrático médio utilizada na avaliação da precisão de previsões pontuais. Com a diferença que aqui a magnitude do erro só influencia a função quando o

VAR é extrapolado. Desta forma, esta função perda também fornece uma medida do tamanho do erro ocorrido quando o VAR é extrapolado, além de informar a frequência de erro. O melhor modelo será aquele que produz uma frequência de erro mais próxima da esperada e no qual os erros são menores em relação ao VAR estimado.

A grande vantagem deste método sobre os três outros apresentados anteriormente é a não necessidade de aplicar qualquer tipo de teste de hipótese para verificar a adequação dos modelos. Com isso, evita-se o problema de baixa potência – alta probabilidade de aceitar uma nula falsa - dos testes dos métodos apoiados em critérios estatísticos.

Em Lopez (1997) realiza-se uma série de experimentos com objetivo de avaliar a capacidade dos quatro métodos apresentados para identificar especificações incorretas de modelos de VAR. No trabalho gera-se retornos com diferentes hipóteses de distribuições e dinâmicas para volatilidade condicional e, em seguida, estima-se o VAR por alguns métodos selecionados. O resultado obtido é que os três métodos estatísticos mostram, na maior parte dos casos, uma baixa potência e, portanto, são pouco eficientes em apontar a imprecisão dos modelos de risco. Por outro lado, o método que se baseia na função perda definida acima tende a apontar como modelo mais adequado o VAR que se baseia no verdadeiro processo gerador dos dados.

A baixa potência dos testes estatísticos foi o motivo que levou à adoção da função definida em (54) e (55) como critério de avaliação dos modelos estudados neste trabalho. Como as séries históricas utilizadas são, relativamente curtas (1000 observações) e a estimação dos modelos econométricos GARCH e SV requer um razoável número de observações para ser implementada, resta um número pequeno de observações para testar a precisão dos modelos. Desta forma, a aplicação dos modelos estatísticos apresentados anteriormente ficaria comprometida.

5- RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se os resultados da aplicação dos modelos discutidos neste trabalho. Os testes foram aplicados em duas carteiras de ativos, em ambas considerando posições compradas. A primeira delas é uma carteira de 5 ativos: os três primeiros vencimentos de DI futuro, Telebrás PN e o IBOVESPA futuro. Em todas as séries trabalhou-se com os retornos logarítmicos dos preços. Nas séries de futuros, utiliza-se no cálculo dos retornos os preços de ajustes dos ativos. A segunda carteira é composta por quatro ativos que, freqüentemente, são utilizados como referência para o mapeamento de posições em outros ativos. Os dois primeiros são os vértices da curva de juros de 20 e 40 dias úteis, para onde podem ser mapeadas as posições de renda fixa através, por exemplo, do método descrito na seção 2.1.1. Os retornos diários destes ativos foram ajustados de forma a refletir exatamente a mudança da expectativa do mercado de taxas de juros de um dia para outro, como explicado na seção 4.1.1. O terceiro ativo, comum à primeira carteira, é a ação Telebrás PN, referencial para mapeamento de posições em opções. O último ativo é o índice IBOVESPA a vista que pode ser o referencial para o mapeamento tanto de posições em ações ou quanto de posições no IBOVESPA futuro.

As duas carteiras são compostas de posições compradas nos ativos com participação relativa idêntica de cada um deles. A cada dia faz-se necessário o rebalanceamento das carteiras para que a variação no valor de mercado dos ativos não altere a participação relativa dos ativos. Nas duas carteiras a série histórica dos retornos é composta por 1000 observações de 04/08/94 a 18/08/98.

O procedimento foi utilizar sempre 900 observações para estimar os modelos. Desta forma, os testes são realizados com as 100 últimas observações da amostra. Na verdade, esta forma de implementação surgiu de uma restrição imposta pelo modelo estatisticamente mais sofisticado: o modelo de volatilidade estocástica. Para este modelo, os trabalhos empíricos na área sugerem que para amostras pequenas os resultados são bastante pobres. Arbitrariamente, resolveu-se fixar como 900 o número mínimo de observações para estimação. Certamente, trabalhar com amostras menores iria liberar

mais observações para os testes. Contudo, teria-se o risco da deterioração dos resultados da estimação inviabilizar a comparação entre os modelos.

Para o cálculo do VAR, estimou-se os parâmetros de cada modelo com as 900 primeiras observações e utilizou-os para a previsão um passo a frente do VAR nos próximos 20 dias úteis. O VAR foi calculado a 1% e 5% de significância. No caso dos modelos SV, GARCH e EWMA, como supõe-se que os retornos tem distribuição condicional normal, o que é necessário prever são as volatilidades e correlações dos ativos. Com estas estimativas é possível realizar a previsão do VAR no período desejado. Nos modelos HS é preciso estimar os quantis nos níveis de significância escolhido. A cada 20 dias reemita-se os parâmetros dos modelos e, novamente, faz-se a previsão do VAR para os próximos 20 dias úteis. Assim, os modelos são reestudamos 4 vezes e temos 100 previsões para o VAR das carteiras. A reestimação diária dos parâmetros do modelo se tornou inviável devido a dificuldades de estimação do modelo SV. Para este modelo as rotinas disponíveis demandam várias intervenções do usuário com a máquina para garantir a convergência no processo de otimização. Em razão disso, o tempo necessário para estimação de cada amostra se torna elevado fazendo com que o custo em termos de tempo de trabalho da reestimação diária seja proibitivo.

Uma vez obtido as previsões para o VAR das carteiras, faz a comparação com a variação efetiva do valor de mercado da carteira em cada dia. Apresenta-se nas seções seguintes a porcentagem de vezes em que o valor de mercado das carteiras excedeu o VAR previsto bem como o valor da função perda sugerida por Lopez (1998) discutida na seção 4.3.4 deste trabalho.

5.1- Carteira 1

5.1.1- Frequência de Erro

A primeira carteira é composta pelos três primeiros vencimentos de DI futuro, Telebrás PN e pelo índice BOVESPA futuro. Nas tabelas abaixo apresenta-se a frequência que a queda no valor de mercado da carteira foi maior que o VAR previsto para 1% e 5% de

significância. Os testes são feitos para cada ativo individualmente e para a carteira (entrada total na tabela). Para o modelo GARCH só foi possível aplicação no caso univariado. Isto porque, para o conjunto de dados em questão, as rotinas utilizadas não conseguiram completar o processo de estimação devido a problemas de convergência no algoritmo de otimização.

Para ilustrar o comportamento das estimativas, apresenta-se também os gráficos com os limites dados pelo VAR da carteira a 5% de significância juntamente com a variação efetiva do seu valor de mercado.

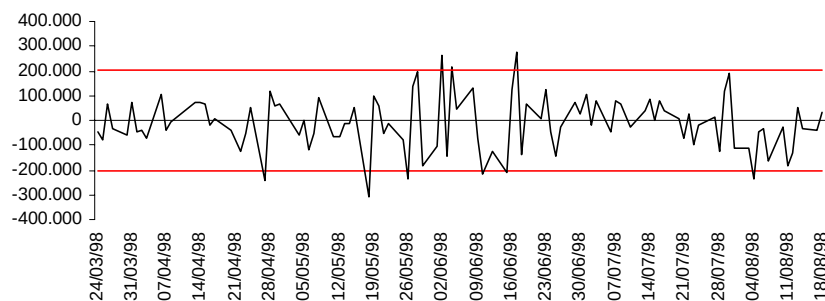
% Erro - 5% de significância

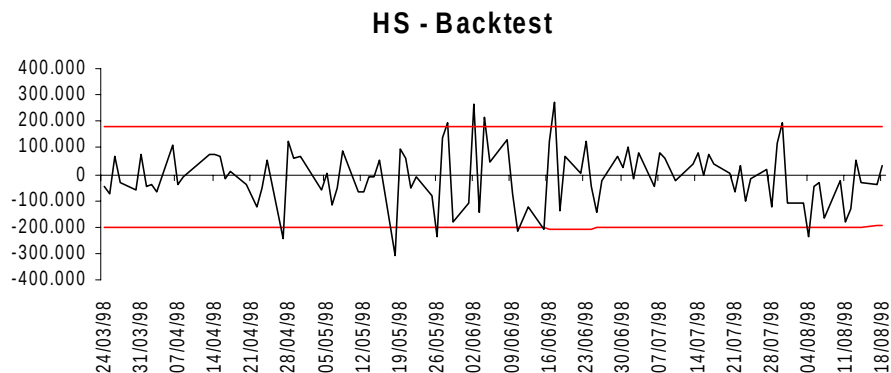
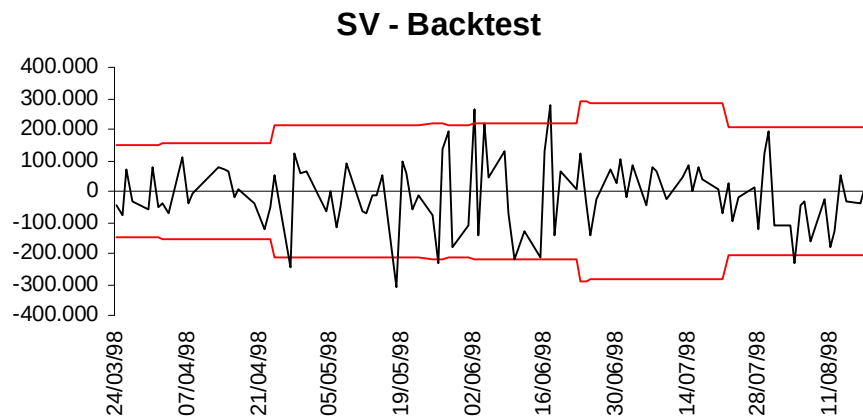
		DI1	DI2	DI3	TEL4	IBVF	Total
Condicional	EWMA	2,00%	1,00%	1,00%	6,00%	5,00%	6,00%
	GARCH	0,00%	1,00%	1,00%	4,00%	6,00%	NA
	SV	2,00%	1,00%	1,00%	6,00%	5,00%	5,00%
Não Condicional	HS	5,00%	2,00%	1,00%	6,00%	5,00%	6,00%

% Erro - 1% de significância

		DI1	DI2	DI3	TEL4	IBVF	Total
Condicional	EWMA	0,00%	1,00%	1,00%	0,00%	1,00%	1,00%
	GARCH	0,00%	1,00%	1,00%	2,00%	2,00%	NA
	SV	2,00%	1,00%	1,00%	0,00%	1,00%	1,00%
Não Condicional	HS	2,00%	1,00%	1,00%	0,00%	0,00%	0,00%

EWMA - Backtest





Como se pode notar pelos gráficos acima, os intervalos delimitados pelos modelos HS e EWMA são bastante semelhantes em forma e largura. Em ambos as variações ocorridas ao longo do período de teste são quase imperceptíveis. No caso do modelo EWMA isto ocorre devido ao fato que a estimativa do parâmetro λ ser próxima de 1 (para todos os ativos e amostras em torno de 0,99) implicando uma alta persistência na volatilidade. No modelo HS a pouca variabilidade dos limites ocorre por se tratar de um modelo não condicional que utiliza peso idêntico para todas as observações da amostra. Nestes dois modelos, a insensibilidade do VAR a alterações na variabilidade dos retornos indica que a reestimação diária dos parâmetros produziria poucos efeitos nos resultados. Por outro lado, no modelo SV nota-se, nitidamente, variabilidade nos limites. Após momentos de aumento da variabilidade dos retornos, o VAR estimado aumenta. e, em seguida a momentos de redução da variabilidade, o intervalo diminui. Isto ocorre por se tratar de um modelo condicional em que as informações mais recentes tendem a influenciar mais fortemente as estimativas. Neste caso, provavelmente, teria-se ganhos com a reestimação diária dos parâmetros do modelo. Isso garantiria maior adaptabilidade do VAR às novas

observações evitando, com isso, períodos, como na penúltima subamostra, em que o intervalo se torna muito amplo frente a variabilidade corrente dos retornos.

Em termos do ajustamento da frequência que os retornos estiveram fora dos limites impostos pelo VAR em relação ao esperado, o modelo SV foi o que apresentou mais precisão. Tanto a 1% quanto a 5% o modelo mostrou exatamente a frequência esperada de erros (1% e 5%, respectivamente). O modelo EWMA foi preciso a 1% de significância, mas subestimou (errou mais que o esperado) o VAR a 5% de significância. O modelo HS subestimou o VAR a 5% e superestimou (errou menos que o esperado) a 1% de significância.

A 5% de significância, para cada ativo tomado individualmente, todos os modelos apresentaram uma tendência de superestimar o VAR no caso dos DI's, com exceção do modelo HS que foi preciso para o DI1. No caso do ativo Telebrás os modelos EWMA, SV e HS subestimaram o VAR, enquanto o modelo GARCH superestimou a 5% de significância, para o IBVF os modelos EWMA, SV e HS foram precisos e o modelo GARCH subestimou o VAR a 5% de significância. Para 1% de significância os 4 modelos foram precisos para os DI's 2 e 3, para o DI 1 os modelos EWMA e GARCH superestimaram o VAR e os outros 2 modelos, SV e HS, subestimaram o VAR. Para Telebrás os modelos EWMA, SV e HS superestimaram o VAR e o modelo GARCH subestimou e para o IBVF os modelos SV e EWMA foram precisos, o modelo GARCH subestimou e o modelo HS superestimou o VAR a 1% de significância.

5.1.2- Teste de Lopez

Nesta seção apresenta-se os resultados dos teste de Lopez o portfólio total e para cada ativo tomado individualmente. Como explicado na seção 4.2.1, o teste se baseia numa função perda que, quando ocorre um retorno que ultrapassa o limite estabelecido pelo VAR, penaliza o tamanho deste erro. Segundo este critério, o melhor modelo é aquele com o menor valor para esta função perda.

5% de significância

		DI1	DI2	DI3	TEL4	IBVF	Total
Condicional	EWMA	1,85E+05	1,10E+07	9,32E+07	2,95E+09	2,87E+09	1,60E+10
	GARCH	0,00E+00	6,95E+06	1,16E+08	9,43E+09	1,02E+10	NA
	SV	6,33E+05	1,04E+07	8,96E+07	3,08E+09	2,35E+09	1,16E+10
Não Condicional	HS	2,03E+06	2,24E+07	1,38E+08	4,01E+09	2,81E+09	1,76E+10

1% de significância

		DI1	DI2	DI3	TEL4	IBVF	Total
Condicional	EWMA	0,00E+00	4,45E+06	5,76E+07	0,00E+00	4,22E+07	6,04E+08
	GARCH	0,00E+00	1,30E+06	8,35E+07	2,61E+09	3,36E+09	NA
	SV	1,28E+05	3,86E+06	5,36E+07	0,00E+00	5,01E+06	6,97E+07
Não Condicional	HS	1,25E+04	1,69E+06	2,88E+07	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00

Para a carteira total, a 5% de significância, o modelo SV apresentou o melhor resultado. A 1% de significância o modelo HS teve a função igual a zero indicando a não existência de nenhum retorno abaixo do VAR. Como o esperado neste caso é a ocorrência de um erro nas 100 observações utilizadas nos teste, isto, na verdade, é indicação de superestimação do VAR. Aliás, esta é uma deficiência desta função perda, tomada isoladamente ela sempre privilegia o modelo que superestima. Assim, uma análise conjunta da frequência de erros é recomendada. O segundo melhor modelo é o SV, que, como mostrado na seção anterior foi preciso segundo o critério de excesso de erro. A tabela abaixo mostra os melhores modelos em cada caso:

Significância	DI1	DI2	DI3	TEL4	IBVF	Total
1%	EWMA e GARCH	GARCH	HS	EWMA e HS	HS	SV
5%	GARCH	SV	GARCH	EWMA	SV	HS

Deve se destacar, que a 1% de significância para DI1, TEL4 e IBVF ocorre o mesmo fato mencionado anteriormente, a função perda é igual a zero.

5.2- Carteira 2

5.2.1- Frequência de Erro

A segunda carteira testada é aquela composta por ativos utilizados como referencial para mapeamento: os vértices de 20 e 40 dias da curva de juros, Telebrás Pn e o índice BOVESPA a vista. Os resultados apresentados são organizados da mesma forma que na carteira 1. Os testes são feitos para cada ativo individualmente e para a carteira

(entrada total na tabela). Novamente, para o modelo GARCH só foi possível aplicação no caso univariado por problemas de convergência na rotina de otimização. Nos gráficos estão os limites dados pelo VAR da carteira a 5% de significância juntamente com a variação efetiva do seu valor de mercado .

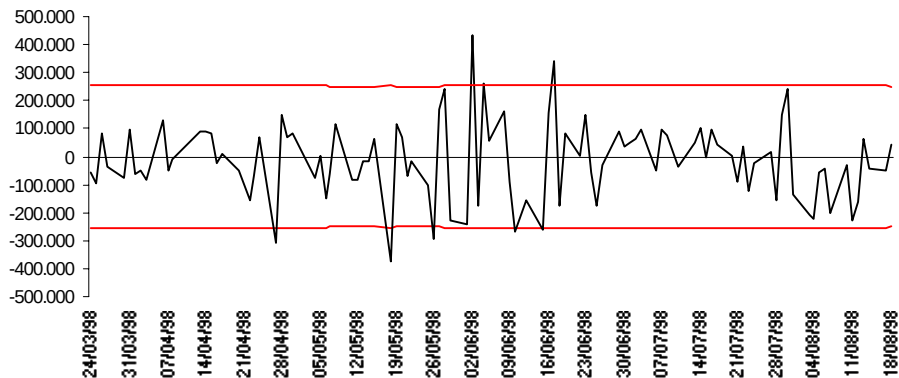
% Erro - 5% de significância

		DI20	DI40	TEL4	IBV	Total
Condicional	EWMA	4,00%	4,00%	6,00%	5,00%	5,00%
	GARCH	3,00%	4,00%	4,00%	7,00%	NA
	SV	4,00%	4,00%	6,00%	7,00%	7,00%
Não Condicional	HS	6,00%	5,00%	6,00%	7,00%	6,00%

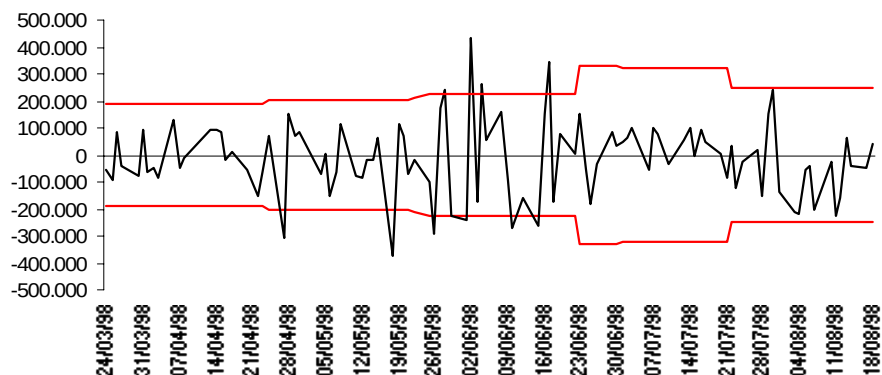
% Erro - 1% de significância

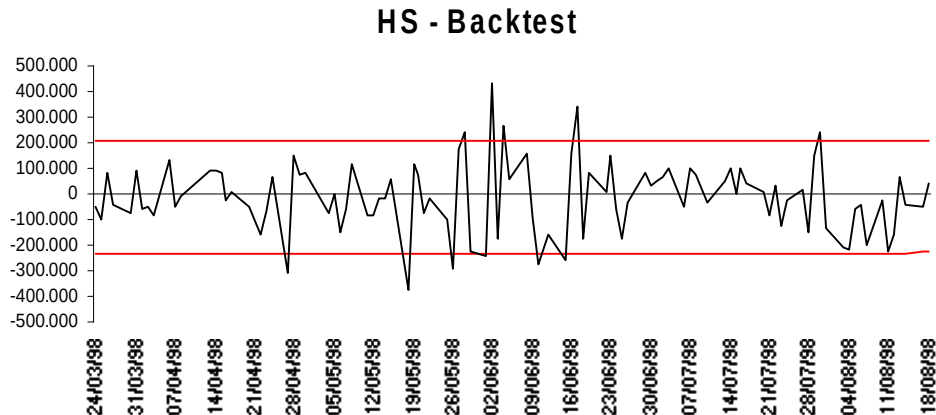
		DI20	DI40	TEL4	IBV	Total
Condicional	EWMA	4,00%	4,00%	0,00%	1,00%	1,00%
	GARCH	3,00%	4,00%	2,00%	3,00%	NA
	SV	4,00%	4,00%	0,00%	3,00%	2,00%
Não Condicional	HS	4,00%	4,00%	0,00%	0,00%	0,00%

EWMA - Backtest



SV - Backtest





Os gráficos acima mostram que o comportamento do VAR estimado para esta carteira é semelhante àquele da carteira anterior. Os modelos EWMA e HS demonstram pouca variabilidade ao longo da amostra. Enquanto, o modelo SV tende a ser mais influenciado pelo comportamento recente dos retornos. Os motivos são os mesmos citados na seção anterior. No caso do modelo EWMA, valor estimado de λ próximo de 1. No modelo HS, a baixa variabilidade das bandas é devido a não condicionalidade do modelo. No modelo SV, a maior sensibilidade do VAR aos retornos mais recentes se deve ao fato de se usar a volatilidade condicional para estimar o VAR, o que implica maior peso para as observações mais recentes.

Em relação a precisão das estimativas, os modelos apresentaram, de maneira geral, um desempenho inferior ao observado na carteira anterior. Para a carteira total, o modelo EWMA foi preciso tanto a 1% como a 5% de significância apresentado frequências de erros iguais as esperadas (1% e 5%, respectivamente). Os modelos SV e HS subestimaram VAR a 5% de significância, enquanto que a 1% o modelo SV subestimou e o modelo HS superestimou o VAR.

Considerando os ativos individualmente, a 5% de significância, os modelos EWMA GARCH e SV superestimaram o VAR para os vértices de 20 e 40 dias úteis, o modelo HS subestimou o VAR no caso do vértice de 20 dias e foi preciso no caso do vértice de 40 dias. A 1% de significância, os 4 modelos subestimaram o VAR. Para o ativo TEL4, a

5% de significância, o modelo EWMA foi preciso, e os outros 3 modelos subestimaram o VAR. A 1% de significância, novamente, o modelo EWMA foi preciso, mas os outros 3 modelos, desta vez, superestimaram o VAR. Para o ativo IBOVESPA o modelo EWMA foi preciso a 1% e 5% de significância, os modelos SV, GARCH e HS subestimaram o VAR a 5% de significância e, para 1% de significância, os modelos GARCH e SV subestimaram o VAR e o modelo HS o superestimou.

Com base no critério de frequência de erro, pode-se dizer que houve uma clara superioridade do modelo EWMA tanto no caso da carteira como para cada ativo tomado individualmente quanto para a carteira total.

5.2.2- Teste de Lopez

Na tabela abaixo apresenta-se o valor da função perda do teste de Lopez para cada um dos ativos e para a carteira total.

5%de significância

		DI20	DI40	TEL4	IBV	Total
Condicional	EWMA	4,62E+09	4,47E+09	4,62E+09	4,38E+09	2,03E+10
	GARCH	4,72E+09	4,73E+09	1,47E+10	1,86E+10	NA
	SV	5,26E+09	4,58E+09	1,07E+10	1,44E+10	4,74E+10
Não Condicional	HS	5,63E+09	5,46E+09	6,27E+09	1,09E+10	3,31E+10

1%de significância

		DI20	DI40	TEL4	IBV	Total
Condicional	EWMA	4,14E+09	3,86E+09	0,00E+00	5,63E+07	3,86E+08
	GARCH	4,28E+09	4,19E+09	4,07E+09	6,33E+09	NA
	SV	5,02E+09	4,01E+09	4,10E+08	3,17E+09	7,23E+09
Não Condicional	HS	4,96E+09	3,75E+09	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00

Também por este critério, nota-se uma clara superioridade do modelo EWMA tanto a 1% quanto a 5% de significância. A tabela abaixo mostra os melhores modelos em cada caso:

Significância	DI20	DI40	TEL4	IBV	Total
1%	EWMA	EWMA	EWMA e HS	HS	HS
5%	EWMA	EWMA	EWMA	EWMA	EWMA

Deve-se destacar, que o modelo HS apresentou a função igual a zero todas as vezes que aparece como melhor modelo.

6- CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi comparar alguns modelos de estimação do *value-at-risk* no caso específico de 2 carteiras de ativos brasileiros. Com a hipótese de normalidade condicional dos retornos, o problema de cálculo do VAR se concentra na estimação da matriz de covariâncias, estimada nesta dissertação por 3 técnicas diferentes: os modelos SV, GARCH e EWMA. O modelo GARCH só pôde ser aplicado no caso univariado. Calculou-se também o VAR pelo modelo HS, um modelo não condicional que abandona a hipótese de normalidade.

Para as duas carteiras os modelos EWMA e HS geraram um VAR pouco adaptativo. No primeiro caso isto se deve a alta persistência presente na variância condicional, expressa num parâmetro λ próximo de 1. No segundo caso, o VAR é relativamente constante por se tratar de um modelo não condicional que impõe peso idêntico a todas as observações da amostra. O modelo SV, por seu turno, apresentou maior adaptabilidade reagindo mais nitidamente às observações mais recentes, resultado esperado para um modelo condicional.

Outro ponto enfatizado neste trabalho foi a forma de comparar os modelos. Como o cálculo do VAR consiste na estimação de um intervalo, as técnicas usuais de comparação utilizadas em estimações pontuais, por exemplo, erro quadrático médio, não são aplicáveis. Uma alternativa é comparar a frequência com que o VAR é excedido com a frequência de erro esperada. Esta estratégia é falha porque, devido a variabilidade das estimativas, é preciso saber se os desvios em relação à frequência esperada são estatisticamente significantes. Os modelos estatísticos que tentam medir esta significância comentados neste trabalho tendem a apresentar baixa potência, principalmente, para séries curtas como no caso em estudo. Por este fato, o trabalho optou pela metodologia sugerida em Lopez (1998) que se baseia numa certa função perda que leva em conta o tamanho do erro quando este ocorrem.

Os resultados obtidos para a 1ª carteira (DI1, DI2, DI3, TEL4 e IBVF) tanto pela observação direta da frequência de erro quanto pela função perda apontam uma superioridade do modelo SV sobre os demais. Já para a Segunda carteira (DI20, DI40, TEL4 e IBVSP) o modelo EWMA se mostrou superior aos demais.

7- BIBLIOGRAFIA

Andersen, T. e B. Sorensen (1994). GMM Estimation of a Stochastic Volatility Model: a Monte Carlo Study. *Working Paper: Northwestern University*.

Black, F. (1976). The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics* 2, 167-179.

Black, F. e M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637-654.

Bollerslev, T. (1986). Generalized Autorregressive Condicional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 51, 307-327.

Bollerslev, T. (1990). Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach. *Review of Economics and Statistics* 72, 498-505.

Bollerslev, T., R. Engle e J. Wooldridge (1988). A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances. *Journal of political Economy* 96, 116-131.

Breidt, F. J. e A. L. Carriquiry (1995). Improved Quasi-Maximum Likelihood Estimation for Stochastic Volatility Models. *Mimeo, Department of Statistics, University of Iowa*.

Butler, J. S. and B. Schachter (1996). Improving Value-at-Risk Estimates by Combining Kernel Estimation with Historical Simulation. *Mimeo. Vanderbilt University and Comptroller of the Currency*.

Clark, P. K. (1973). A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices. *Econometrica* 41, 135-156.

Christoffersen, P. F. (1996). Evaluating Interval Forecasts. *Mimeo, Research Departament, International Monetary Fund. Forthcoming in the International Economic Review*.

Crnkovic, C. and J. Drachman (1996). Quality Control. *Risk* 9, 139-143.

Danielsson, J. and C. G. Vries (1997). Value-at-Risk and Extreme Returns. Mimeo, Tinbergen Institute Rotterdam.

Diebold, F., A. Hickman, A. Inoue, T. Shcherer. Converting 1-Day Volatility to h-Day Volatility: Scaling by $\sqrt{h}$ is Worse than You Think. Mimeo, *Department of Statistics, University of Pennsylvania*.

Dowd, K. (1998). Beyond Value at Risk. John Wiley & Sons.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation. *Econometrica* 50, 987-1007.

Engle, R., D. Lilien e R. Robins (1987). Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M model. *Econometrica* 55, 251-276.

Engle, R. V. Ng e M. Rothschild (1990). Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills. *Journal of Econometrics* 45, 213-238.

Fama, E. F. (1963). Mandelbrot and the Stable Paretian Distribution, *Journal of Business* 36, 420-429.

Fama, E. (1965). The behavior of Stock Market Prices. *Journal of Business* 38, 593-624.

Guldimann, T. (1996). Beyond the Year 2000. *Risk* 9 (june), 17-19.

Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press.

Hansen, L. P. (1982). Large Sample Properties of Generalized Method of Moments estimators. *Econometrica* 50, 1029-54.

Harvey, C., E. Ruiz e N. Shephard (1994). Multivariate Stochastic Variance Models. *Review of Economic Studies* 61, 247-264.

Harvey, A.C. e N. Shephard (1996). The Estimation of an Assymmetric Stochastic Volatility model for asset returns. *Journal of Business and Economic Statistics* (forthcoming).

Hull, J. (1989). *Options, Futures and Other Derivative Securities*. New Jersey.

Hull, J. e A. White (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance* 42, 281-300

Jackson, P., D.J. Maude and W. Perraudin (1997). Bank Capital and Value-at-Risk. *Journal of Derivatives* 4 (Spring): 73-90.

Jacquier, E., N. G. Polson e P. E. Rossi (1994). Baysian Analysis of Stochastic Volatility models. *Journal of Economics and Business Statistics* 12. Forthcoming.

Keynes, J.M. (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. New York: Harcourt, Brace & World.

Kupiec, P. (1995). Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models. *Journal of Derivatives* 3, 73-84.

Lopez, J. A. (1996). Regulatory Evaluation of Value-at-Risk Models. Mimeo, Research and Market Analisis Group, Federal Reserve Bank of New York.

Lopez, J. A. (1998). Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates. Mimeo, Research and Market Analisis Group, Federal Reserve Bank of New York.

Mahoney, J.M. (1996). Forecast Biases in Value-at-Risk Estimations: Evidence from Foreign Exchange and Global Equity Portfólios. *Mimeo, Federal Reserve Bank of New York*.

Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculatives Prices. *Journal of Business* 36: 394-419.

Nelson, D. (1990). Stacionarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model. *Econometric Theory* 6, 318-334.

Ruiz, E. (1994). Quasi-Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models. *Journal of Econometrics* 63, 289-306.

Tauchen, G. and M. Pitts (1983). The Price Variability Volume Relationship on Speculative Markets. *Econometrica* 51, 485-505.

Taylor, S. J. (1980). Conjectured Models for Trends in Financial Prices, Tests and Forecasts. *J. R. Statist. Soc. A143*, 338-362.

Taylor, S. J. (1986). *Modeling Financial Time Series*. John Wiley. Chichester.